풀이

STEP III 1988, 문제 12

역학 • 비스듬한 충돌

STEP III 1988, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s3-q12

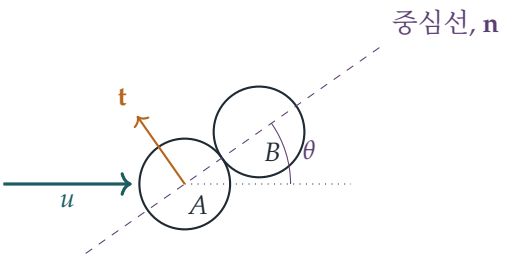
핵심 아이디어

매끄러운 구(smooth sphere)끼리 충돌할 때 충격량(impulse)은 충돌하는 순간의 중심선(line of centres) 방향으로만 작용한다. 따라서 모든 속도를 그 직선 방향의 성분(component)과 그에 수직인 성분으로 나눈다. 수직 성분은 변하지 않고, 중심선 방향으로는 보통의 1차원 충돌이 일어난다. 그러면 모든 것이 단 하나의 미지수, 곧 중심선과 첫 번째 공의 처음 속도 사이의 각에 따라 결정된다.

풀이

설정하기

두 공을 질량이 m으로 같은 매끄러운 구로 보고, 매끄러운 탁자 위에서 미끄러진다고 하자. 그러면 충돌하는 동안 작용하는 수평 방향의 힘은 중심선 방향의 접촉 충격량뿐이다. 첫 번째 공 A가 속력 u로 움직이고, 충돌 순간 중심선이 A의 속도와 이루는 각을 θ라 하자. 여기서 $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$이다($\theta = \frac{1}{2}\pi$이면 두 공이 스치기만 할 뿐 아무 일도 일어나지 않는다). 중심선 방향(A에서 B 쪽)의 단위벡터를 $\mathbf{n}$, 이에 수직인 단위벡터를 $\mathbf{t}$라 하자.



충돌 전 A의 속도는 $\mathbf{n}$ 방향 성분이 $u\cos\theta$, $\mathbf{t}$ 방향 성분이 $u\sin\theta$이고, B는 정지해 있다.

$\mathbf{t}$ 방향: 이 방향으로는 어느 공에도 충격량이 작용하지 않으므로 A는 $u\sin\theta$를, B는 0을 그대로 유지한다.

$\mathbf{n}$ 방향: 충돌 후의 성분을 v_A, v_B라 하자. 운동량 보존(conservation of momentum)(질량은 약분된다)과 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 의해

$$v_A + v_B = u\cos\theta, \qquad v_B - v_A = e\,u\cos\theta,$$

이므로

$$v_A = \tfrac{1}{2}(1-e)\,u\cos\theta, \qquad v_B = \tfrac{1}{2}(1+e)\,u\cos\theta.$$

따라서 충돌 후에는

$$\mathbf{v}_A = \tfrac{1}{2}(1-e)u\cos\theta\,\mathbf{n} + u\sin\theta\,\mathbf{t}, \qquad \mathbf{v}_B = \tfrac{1}{2}(1+e)u\cos\theta\,\mathbf{n}.$$

두 속도 사이의 각

B는 중심선을 따라 움직이며, 두 속도 사이의 각이 예각인 것은 두 속도의 스칼라곱(scalar product)이 양수인 것과 정확히 같다. 여기서

$$\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B = \tfrac{1}{4}(1-e)(1+e)\,u^2\cos^2\theta > 0,$$

인데, 이는 $e<1$, $u\neq 0$이고 $0\le\theta<\frac{1}{2}\pi$에서 $\cos\theta>0$이기 때문이다. 따라서 두 속도 사이의 각은 $\frac{1}{2}\pi$보다 작으며, 이것이 보이려던 것이다. (정면 충돌(head-on impact), 즉 $\theta=0$인 경우에는 두 공이 같은 직선을 따라 움직이고 각은 0이다.)

$e<1$이 어디에 쓰였는지 주목하자. $e=1$이면 $v_A=0$이 되어 두 공은 정확히 직각으로 갈라지는데, 이것이 당구에서 잘 알려진 결과이다.

최대 편향각

A가 꺾이는 각, 즉 $\mathbf{v}_A$와 처음 방향 $\cos\theta\,\mathbf{n}+\sin\theta\,\mathbf{t}$ 사이의 각을 ϕ라 하자. $k=\frac{1}{2}(1-e)$로 두면 $0<k\le\frac{1}{2}$이고 $\mathbf{v}_A = u(k\cos\theta\,\mathbf{n}+\sin\theta\,\mathbf{t})$이다. 방향벡터 $(\cos\theta,\sin\theta)$와 $(k\cos\theta,\sin\theta)$의 스칼라곱과 2차원 외적(cross product)을 이용하면

$$|\mathbf{v}_A|\cos\phi = u\,(k\cos^2\theta+\sin^2\theta),$$
$$|\mathbf{v}_A|\sin\phi = u\,(\cos\theta\sin\theta - k\cos\theta\sin\theta) = u\,(1-k)\sin\theta\cos\theta.$$

첫째 식이 양수이므로 ϕ는 예각이다. 두 식을 나눈 다음 분자와 분모를 $\cos^2\theta$로 나누고 $t=\tan\theta\ge 0$으로 두면

$$\tan\phi = \frac{(1-k)t}{k+t^2}.$$

? 생각해 보기 복잡한 미분 없이 이것을 어떻게 최대화할 수 있을까?

ϕ가 예각이므로 ϕ를 최대화하는 것은 $\tan\phi$를 최대화하는 것과 같다. $t > 0$일 때,

$$\tan\phi = \frac{1-k}{k/t+t} \quad \text{이고} \quad \frac{k}{t} + t \geq 2\sqrt{k}$$

이다. 뒤의 부등식은 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의한 것이며, 등호는 정확히 $t = \sqrt{k}$일 때 성립한다. ($t = 0$이면 $\phi = 0$이다.) 따라서 최댓값은 $\tan\theta = \sqrt{k}$일 때 얻어지고,

$$\tan\phi_{\max} = \frac{1-k}{2\sqrt{k}}.$$

이를 사인으로 바꾸기 위해 $(1-k)^2 + (2\sqrt{k})^2 = 1 - 2k + k^2 + 4k = (1+k)^2$임에 주목하자. 즉 두 변의 길이가 $1-k$와 $2\sqrt{k}$인 직각삼각형의 빗변(hypotenuse)은 $1+k$이므로

$$\sin\phi_{\max} = \frac{1-k}{1+k} = \frac{\frac{1}{2}(1+e)}{\frac{1}{2}(3-e)} = \frac{1+e}{3-e},$$

이다. 여기서 $1-k = \frac{1}{2}(1+e)$와 $1+k = \frac{1}{2}(3-e)$를 이용하였다. $\phi_{\max}$는 예각이므로

$$\phi_{\max} = \sin^{-1}\left(\frac{1+e}{3-e}\right),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 이 최댓값은 중심선이 처음 운동 방향과 각 $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1}{2}(1-e)}$를 이룰 때 나타난다.

검산

- $e \to 1$: 공식은 $\sin^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi$를 주며, 이는 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌의 경우와 일치한다. 그 경우 A는 중심선 방향의 속도를 모두 잃으므로 항상 그 직선에 수직으로 움직이고, 거의 정면으로 부딪히면 처음 경로와 거의 직각을 이루는 방향으로 튕겨 나간다.
- $e = 0$: $\sin\phi_{\max} = \frac{1}{3}$이므로 $\phi_{\max} \approx 0.3398\ \text{rad}(19.5°)$이다.
- $e = \frac{1}{2}$: $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2} \approx 0.4636$에서 $\sin\phi_{\max} = \frac{3}{5}$, $\phi_{\max} \approx 0.6435$ rad이다. θ의 값 200 000개에 대해 편향각을 수치적으로 조사한 결과 두 수치가 모두 재현되었고, 무작위 충돌 200 000번에서 두 속도 사이의 각이 $\frac{1}{2}\pi$ 이상이 된 경우는 한 번도 없었다.

흔한 실수

- 반발 법칙을 중심선 방향의 성분이 아니라 전체 속력에 적용하는 것.
- A의 속도의 수직 성분이 변하지 않는다는 사실을 잊는 것. 바로 이 성분 때문에 A가 꺾이게 된다.

- 역탄젠트를 미분하여 ϕ 자체를 최대화하려는 것. (ϕ가 예각이므로 정당한) $\tan\phi$를 다루는 편이 훨씬 깔끔하다.

STEP 너머

여기서 쓴 분해는 뉴턴의 제2법칙을 충격량 꼴로 쓴 것이다. 충격량은 그것이 작용하는 방향으로만 운동량을 바꾼다. 탄성 충돌에서 직각이 나오는 결과는 기준틀을 이용한 깔끔한 논증의 특수한 경우이다. 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 탄성 충돌은 각 공의 속력을 유지한 채 방향만 돌려 놓으며, 이를 다시 실험실 좌표계(lab frame)로 변환하면 가능한 모든 결과를 한꺼번에 얻는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌을 이런 방식으로 질량중심 좌표계에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.