풀이

STEP III 1988, 문제 11

역학 • 마찰이 있는 사다리의 평형

> **STEP III 1988, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q11

핵심 아이디어

먼저 기하부터 정리한다. 지면, 경사로(ramp), 사다리는 각의 크기를 이미 알고 있는 삼각형을 이루고, 이로부터 매끄러운(smooth) 경사로가 사다리 꼭대기를 어느 방향으로 미는지 알 수 있다. 그다음은 사다리 문제의 표준 절차를 따른다. 두 방향으로 힘을 분해하고, 사다리 밑동에 대한 모멘트(moment)를 구한 뒤, 필요한 마찰력(friction)을 μ와 수직항력(normal reaction)의 곱과 비교한다. 인부의 위치는 모멘트 방정식에만 들어가므로, 하나의 일반적인 공식으로 두 소문항에 모두 답할 수 있다.

풀이

설정하기

사다리를 균일한 막대(uniform rod)로, 인부를 입자(particle)로 모형화한다. 경사로의 밑동을 A, 사다리의 밑동을 B, 경사로 위에 놓인 사다리의 꼭대기를 P라 하자.

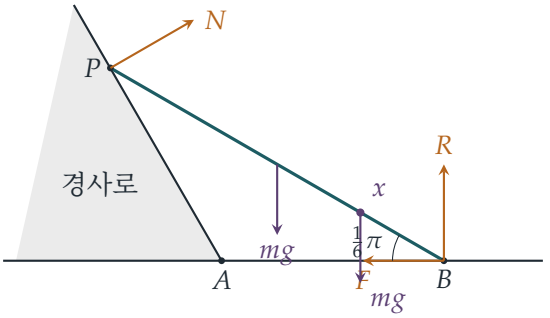
기하. 삼각형 ABP에서 B에서의 각은 $\frac{1}{6}\pi$(사다리의 기울기)이다. 경사로는 연직선과 $\frac{1}{6}\pi$를 이루므로, A의 반대쪽에서 수평선과 $\frac{1}{3}\pi$를 이룬다. 따라서 삼각형 내부의 A에서의 각은 $\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$이고, P에서의 각은 $\frac{1}{6}\pi$가 남는다. 그러므로 이 삼각형은 $AP = AB$인 이등변 삼각형(isosceles triangle)이고, 사인 법칙(sine rule)에 의해

$$AB = \frac{l \sin \frac{1}{6}\pi}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{l}{\sqrt{3}},$$

이며, 이는 주어진 거리와 일치한다. 주어진 자료는 서로 모순이 없고, P는 실제로 경사로 위에 있다.

경사로 반작용의 방향. 경사로는 매끄러우므로, 경사로가 사다리에 작용하는 반작용 N은 경

사로에 수직이다. 경사로는 수평선과 $\frac{1}{3}\pi$를 이루므로, 그 법선은 수평선과 $\frac{1}{6}\pi$를 이루며 위쪽으로, 경사로에서 멀어지는 방향, 즉 B 쪽을 향한다. 따라서 N의 수평 성분은 사다리를 경사로에서 밀어내는 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$이고, 연직 성분은 위쪽으로 $\frac{1}{2}N$이다.



방정식. 인부가 B에서 사다리를 따라 거리 x만큼 올라가 있다고 하자. B에서 지면은 위쪽으로 수직항력 R를, 경사로 쪽 수평 방향으로 마찰력 F를 작용한다(그 밖의 유일한 수평력은 밑동을 경사로에서 밀어내는 N의 성분이므로, 마찰력은 그것에 맞서는 방향이어야 한다).

수평 방향과 연직 방향으로 분해하면

$$F = \tfrac{\sqrt{3}}{2}N, \qquad\qquad R + \tfrac{1}{2}N = 2mg.$$

R와 F가 사라지도록 B에 대한 모멘트를 구한다. B에서 사다리를 따라 거리 s만큼 올라간 점까지의 수평 거리는 $s\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}s$이다. N의 작용선(line of action)은 수평선과 $\frac{1}{6}\pi$를 이루고, BP는 수평선의 반대쪽으로 $\frac{1}{6}\pi$를 이루므로, N은 사다리와 $\frac{1}{3}\pi$의 각을 이룬다. B에 대한 N의 모멘트는 $Nl\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}Nl$이다. 따라서

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}Nl = mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{l}{2} + mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}x \quad\Longrightarrow\quad N = mg\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{l}\right).$$

? 생각해 보기 N의 모멘트는 왜 이렇게 간단하게 나올까?

N이 사다리와 $\frac{1}{3}\pi$의 각으로 만나므로, B에서 N의 작용선까지의 수직 거리는 $l\sin\frac{1}{3}\pi$이다. 또는 N을 성분으로 나누어 볼 수도 있다. 수평 성분 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$은 높이 $\frac{1}{2}l$에서 작용하고, 연직 성분 $\frac{1}{2}N$은 수평 거리 $\frac{\sqrt{3}}{2}l$에서 작용한다. 두 성분은 모두 $\frac{\sqrt{3}}{4}Nl$의 모멘트를 주고, 이를 더하면 $\frac{\sqrt{3}}{2}Nl$이 된다.

그러면 $0 \le x \le l$에 대하여 $R = 2mg - \frac{1}{2}N = mg\left(\frac{7}{4} - \frac{x}{2l}\right) > 0$이므로, 밑동은 지면에서 떨어지지 않는다. $F \le \mu R$인 한 사다리는 미끄러지지 않으며, 이는

$$\mu \;\ge\; \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}\,N}{4mg - N} = \frac{\sqrt{3}\,(l+2x)}{7l-2x}.$$

을 뜻한다. 이 비는 x에 대하여 증가한다. 분자는 증가하고 양수인 분모는 감소하기 때문이다. 따라서 인부가 올라갈수록 필요한 마찰력은 꾸준히 커진다.

소문항 (i)

인부가 중점에 이르는 순간 사다리가 미끄러진다. 따라서 한계 마찰(limiting friction)에 도달하는 것은 정확히 $x = \frac{1}{2}l$일 때이며, F/R가 x에 대하여 증가하므로 그 이전에는 도달하지 않는다. 이때 $N = mg$, $F = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$, $R = \frac{3}{2}mg$이므로

$$\mu = \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

소문항 (ii)

모든 $x \in [0, l]$에 대하여 $F \leq \mu R$이면 인부는 꼭대기에 도달한다. F/R는 x에 대하여 증가하므로, 가장 나쁜 경우는 $x = l$이다. 이때 $N = \frac{3}{2}mg$, $F = \frac{3\sqrt{3}}{4}mg$, $R = \frac{5}{4}mg$이므로, 마찰 계수(coefficient of friction)의 최솟값은

$$\mu = \frac{3\sqrt{3}/4}{5/4} = \frac{3\sqrt{3}}{5} \approx 1.04.$$

검산

- 사다리 위에 아무도 없을 때($x = 0$) 공식은 $\mu \geq \sqrt{3}/7 \approx 0.247$을 준다. 이는 두 답보다 모두 작으며, 마땅히 그래야 한다.
- 힘을 벡터로 나타내고 $l = 1$, $m = 1$, $g = 9.8$을 세 평형 방정식에 대입하여 수치적으로 계산하면 $N/mg = 1$과 $\frac{3}{2}$, 그리고 비 $F/R = 0.57735\ldots$와 $1.03923\ldots$가 다시 나온다. 또한 사다리 위의 101개 위치에서 F/R가 증가함도 확인된다.

흔한 실수

- 연직 벽의 경우처럼 경사로의 반작용을 수평이라고 보는 것. 여기서는 반작용이 수평선 위로 $\frac{1}{6}\pi$만큼 기울어져 있고, 그 위쪽 성분이 R를 줄인다.
- 연직 방향으로 분해할 때 인부의 무게를 빠뜨려 $2mg$ 대신 $R + \frac{1}{2}N = mg$로 쓰는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 배치에 대한 작은 최적화 문제이다. 하중의 모든 위치에 대하여 F/R의 가장 나쁜 경우를 찾아야 한다. 공학자들이 구조물의 임계 하중 조건을 찾는 방법이 바로 이것이다. 조건 $F \leq \mu R$를 그려 보는 유용한 방법은 **마찰 원뿔**(*cone of friction*)이다. 지면 반작용의 합력은 법선으로부터 각 $\arctan \mu$ 안에 있어야 하며, 필요한 반작용이 그 원뿔을 벗어나

는 순간 사다리가 미끄러진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학(rigid-body statics)과 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.