풀이

STEP III 1988, 문제 10

순수수학 • 추적 곡선

STEP III 1988, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s3-q10

이 문제는 *Beyond STEP*의 8.5 절 그레이하운드를 쫓는 그레이하운드에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/pursuit.html

핵심 아이디어

움직이는 개 네 마리를 따로따로 추적하려 하지 마라. 이 설정은 중심에 대한 4분의 1 회전(quarter-turn)에 대하여 변하지 않으므로, 개들은 항상 O를 중심으로 하는 정사각형의 꼭짓점에 있다. 이 정사각형은 줄어들면서 회전하지만 계속 정사각형이다. 따라서 A의 속도와 직선 AO 사이의 각이 고정되며, 속도와 반지름 사이의 각이 일정하다는 것이 바로 등각나선(equiangular spiral) $r = \lambda \mathrm{e}^{-k\theta}$를 만들어 내는 조건이다.

풀이

개들은 정사각형 위에 머문다

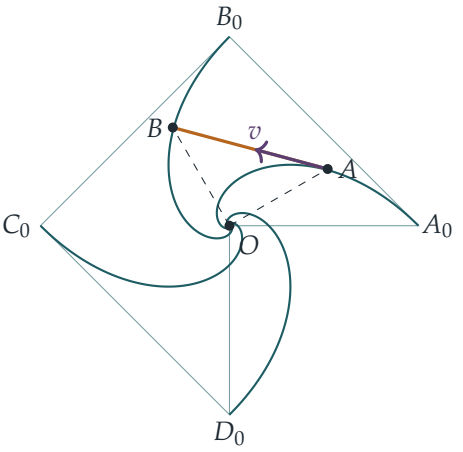
원점 O를 정사각형의 중심에 잡고, 개들에게 시계 반대 방향으로 이름을 붙여 B는 A에서 시계 반대 방향으로 4분의 1 회전한 위치에, C는 B에서 그만큼 회전한 위치에 있도록 하는 식으로 한다.

그림 전체를 O에 대하여 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시켜 보자. A, B, C, D의 출발 위치는 B, C, D, A의 출발 위치로 옮겨지고, "속력 v로 다음 개를 향해 곧장 달린다"는 규칙은 모든 개에게 똑같은 규칙이다. 따라서 회전시킨 운동 역시 같은 출발 배치에서 같은 규칙을 따르는 운동이다. 주어진 출발 상태에서의 운동은 유일하므로(개들이 서로 떨어져 있는 동안 속도는 위치의 매끄러운 함수이다), 회전시킨 운동이 곧 실제 운동이다. 다시 말해, 모든 순간에 B의 위치는 A의 위치를 O에 대하여 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시킨 것이다. C와 D도 마찬가지이다. 따라서 $ABCD$는

항상 O를 중심으로 하는 정사각형이다.

속도와 반지름 사이의 각

극좌표(polar coordinates)로 A가 (r, θ)에 있다고 하자. 그러면 B는 $(r, \theta + \frac{\pi}{2})$에 있으므로 $OA = OB = r$이고 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$이다. 삼각형 OAB는 직각이등변삼각형(right-angled isosceles triangle)이므로 $\angle OAB = \frac{\pi}{4}$이다.



그림은 출발 꼭짓점 A_0, B_0, C_0, D_0에서 나선을 그리며 안쪽으로 들어가는 네 경로와, 어느 한 순간의 개 A와 B를 보여 준다. A의 속도(자주색)는 AB 방향을 향한다.

A의 속도는 크기가 v이고 AB 방향을 향하며, 이 방향은 안쪽을 향하는 반지름 AO와 $\frac{\pi}{4}$의 각을 이룬다. 이를 지름 방향 성분(radial component, 바깥쪽이 양의 방향)과 횡방향 성분(transverse component, θ가 증가하는 방향)으로 나누면

$$\dot{r} = -v\cos\frac{\pi}{4}, \qquad r\dot{\theta} = v\sin\frac{\pi}{4}.$$

B가 A의 시계 반대 방향 쪽에 있어서 A가 시계 반대 방향으로 끌려 돌기 때문에 횡방향 성분은 양수이다.

> ? **생각해 보기** 이 두 식을 서로 나누는 것이 왜 정당한가?

개들이 서로 떨어져 있는 동안 $r\dot{\theta} = v/\sqrt{2} > 0$이므로, θ는 시간에 대하여 순증가한다. 따라서 경로를 따라가는 매개변수로 t 대신 θ를 쓸 수 있고, 연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{-v/\sqrt{2}}{v/(\sqrt{2}r)} = -r.$$

경로 구하기

$r > 0$이므로 변수분리(separation of variables)를 할 수 있다. $\int \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\int \mathrm{d}\theta$이므로 $\ln r = -\theta + c$, 즉

$$r = \lambda \mathrm{e}^{-\theta}$$

이고, 여기서 $\lambda = \mathrm{e}^{c}$는 상수이다. 이것이 구하려는 결과이다. 시초선(initial line)을 OA_0로 잡아 출발할 때 $\theta = 0$이 되도록 하면, λ는 A와 O 사이의 처음 거리, 곧 한 변의 길이가 a인 정사각형에서 $a/\sqrt{2}$이다. 다른 시초선을 택하면 λ는 상수배만큼 달라질 뿐이다. (개들에게 시계 방향으로 이름을 붙였다면, θ를 시계 방향으로 재면 같은 식을 얻는다.)

개 n마리로의 일반화

정n각형(regular n-gon)의 꼭짓점에 있는 개 n마리(시계 반대 방향으로 이름을 붙이고, 각자 다음 개를 쫓는다)에 대해서도 $\frac{2\pi}{n}$만큼의 회전을 써서 같은 논증이 성립한다. 개들은 항상 O를 중심으로 하는 정n각형을 이룬다. 따라서 A가 (r, θ)에 있으면 다음 개 B는 $(r, \theta + \frac{2\pi}{n})$에 있다.

삼각형 OAB는 꼭지각이 $\frac{2\pi}{n}$인 이등변삼각형이므로 각 밑각은

$$\angle OAB = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

앞에서처럼 A의 속도를 분해하면

$$\dot{r} = -v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = -v\sin\frac{\pi}{n}, \qquad r\dot{\theta} = v\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = v\cos\frac{\pi}{n}.$$

$n \geq 3$이므로 $\cos\frac{\pi}{n} > 0$이고, 따라서 이번에도 θ는 꾸준히 증가하며

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r\tan\frac{\pi}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad r = \lambda\,\mathrm{e}^{-\theta\tan(\pi/n)}.$$

$n = 4$이면 $\tan\frac{\pi}{4} = 1$이므로 $r = \lambda\mathrm{e}^{-\theta}$를 다시 얻는다. 각 개는 등각나선, 곧 로그나선(logarithmic spiral)을 따라가며, 모든 반지름과 일정한 각 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$으로 만난다.

덤으로 얻는 멋진 결과가 있다. $\dot{r} = -v\sin\frac{\pi}{n}$이 상수이므로, r_0을 O로부터의 처음 거리라 할 때 개들은 시간 $r_0/(v\sin\frac{\pi}{n})$ 뒤에 O에서 만난다. 그동안 $\theta \to \infty$이어서 각 개가 O 둘레를 무한히 많이 돌지만, 각 개가 달린 거리는 유한한 값 $r_0/\sin\frac{\pi}{n}$이다. (정사각형의 경우 이 값은 한 변의 길이 a이다.)

검산

► $n = 4$일 때의 결과는 일반 공식에서 $\tan\frac{\pi}{4} = 1$인 특수한 경우이다.

- $n \to \infty$이면 $\tan \frac{\pi}{n} \to 0$이고 경로는 원에 가까워진다. 각 개는 원 위에서 거의 바로 옆에 있는 이웃을 쫓고 있기 때문이다.
- 추격 과정을 수치적으로 모의실험하였다(개 $n = 3, 4, 5, 6, 8$마리에 대하여 RK4를 사용하고, 반지름 1에서 출발). 계산한 r는 $\mathrm{e}^{-\theta \tan(\pi/n)}$와 상대오차(relative error) 10^{-11} 이내로 일치하였다. $n = 4$일 때 $r = 0.02$에 이르기까지의 시간과 경로 길이는 $1.386 = 0.98\sqrt{2}$로 나왔으며, 이는 $(1 - 0.02) / \sin \frac{\pi}{4}$로 예측한 값과 같다.

흔한 실수

- 개들이 정다각형 위에 머문다는 사실을 먼저 정당화하지 않고 $\dot{r}$와 $r\dot{\theta}$를 적어 버리는 것. A에서의 각을 알 수 있게 해 주는 것은 바로 대칭 논증이다.
- AB와 반지름 AO 사이의 각($\frac{\pi}{4}$) 대신 다각형의 내각(정사각형에서는 $\frac{\pi}{2}$)을 쓰는 것.
- 속도의 횡방향 성분이 $\dot{\theta}$가 아니라 $r\dot{\theta}$라는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이것은 고전적인 **추적 문제**(*pursuit problem*)이다. 대칭을 이용한 단계는 미분방정식(differential equations)의 일반 원리의 한 예이다. 방정식과 초기 조건이 모두 어떤 대칭에 대하여 불변이면, 해의 유일성(uniqueness)에 의하여 해도 그 대칭에 대하여 불변일 수밖에 없다. 모든 반지름과 일정한 각으로 만나는 곡선이 바로 등각나선이다. 복소수꼴로 나타내면 $z = \mathrm{e}^{(-k+\mathrm{i})\theta}$이므로, 전체 운동은 평면의 연속적인 "나선 닮음변환(spiral similarity)"이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하학적 관점을 전개하고, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 해의 존재성과 유일성을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.