풀이

STEP III 1988, 문제 1

순수수학 • 곡선 그리기와 한계

> **STEP III 1988, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q1

핵심 아이디어

그래프를 그릴 때, 인수 $x^2\mathrm{e}^{-x}$는 결코 음이 아니므로 y의 부호는 전적으로 $1+x$가 결정한다. 이 사실에 도함수(derivative) 하나, 그리고 양 끝과 $x=-1$ 근처에서의 거동을 더하면 전체 모양이 나온다. 적분에서는 x^2을 $1+x$로 나누는 것이 가장 깔끔한 방법이다. 그러면 피적분함수(integrand)의 대부분은 적분하여 o이 되고, 남은 부분은 간단한 두 경계 사이에 쉽게 가둘 수 있다.

풀이

그래프

$x \neq -1$인 모든 x에 대하여 정의된 함수 $f(x) = \dfrac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{1+x}$를 생각하자.

부호와 영점. $x^2 \geq 0$이고 $\mathrm{e}^{-x} > 0$이므로 $x < -1$이면 $f(x) < 0$이고 $x > -1$이면 $f(x) \geq 0$이며, $f(x) = 0$인 것은 $x = 0$일 때뿐이다. 인수 x^2 때문에 곡선은 원점에서 x축을 가로지르지 않고 접한다.

점근선과 양 끝.

- $x \to -1$일 때 분자는 $\mathrm{e} > 0$으로, 분모는 0으로 가므로 $x = -1$은 수직점근선(vertical asymptote)이고, $x \to -1^-$일 때 $f \to -\infty$, $x \to -1^+$일 때 $f \to +\infty$이다.
- $x \to +\infty$일 때, 지수함수가 거듭제곱보다 빠르게 커지므로 $f(x) \approx x\mathrm{e}^{-x} \to 0^+$이다. 따라서 오른쪽에서 $y = 0$은 점근선이고, 곡선은 위에서 이 점근선에 다가간다.
- $x \to -\infty$일 때 $\dfrac{x^2}{1+x} \approx x \to -\infty$이고 $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$이므로 $f(x) \to -\infty$이며, 그 속도는

매우 빠르다.

정류점. 몫의 미분법(quotient rule)에 의하여

$$f'(x) = \frac{(2x - x^2)\mathrm{e}^{-x}(1+x) - x^2\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{-x}\left(2x + x^2 - x^3 - x^2\right)}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{x\left(2 - x^2\right)\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^2}.$$

따라서 $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{2}$에서 $f'(x) = 0$이다. 인수 e^{-x}와 $(1+x)^2$은 양수이므로 f'의 부호는 $x(2 - x^2)$의 부호와 같다.

구간	$x < -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \sqrt{2}$	$x > \sqrt{2}$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

이로부터 다음을 얻는다.

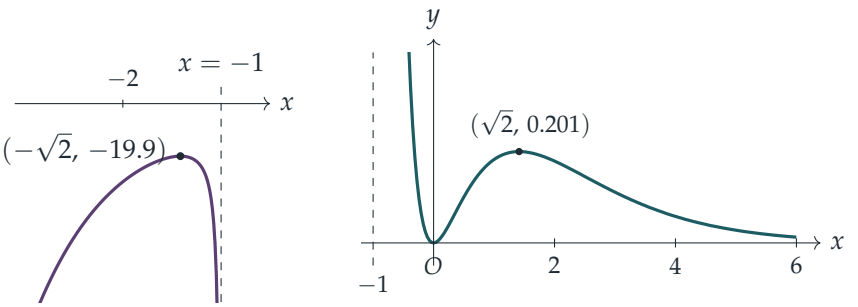
- $x = \sqrt{2}$에서 극댓값(local maximum)을 가지며, 이때 $y = \dfrac{2\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 0.201$이다.
- 원점에서 극솟값(local minimum)을 가진다.
- 왼쪽 가지의 $x = -\sqrt{2}$에서 극댓값을 가지며, 이때 $y = \dfrac{2\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}} = -2(\sqrt{2}+1)\mathrm{e}^{\sqrt{2}} \approx -19.9$이다.

? **생각해 보기** 완전히 축 아래에 놓인 가지가 어떻게 극댓값을 가질 수 있을까?

$x < -1$에서 곡선은 $x \to -\infty$일 때 $-\infty$에서 올라와서 점근선 $x = -1$에서 다시 $-\infty$로 내려가므로, 그 사이 어딘가에서 방향을 바꿔야 한다. 가장 높은 점은 $x = -\sqrt{2}$에 있으며, 그래도 축보다 한참 아래이다. 이 가지는 축 아래에 매달린, 뒤집힌 "언덕" 모양이고 그 높이는 약 -19.9이다.

오른쪽에서 곡선은 $x = -1$ 바로 오른쪽의 $+\infty$에서 원점의 0까지 내려왔다가, $x = \sqrt{2}$에서의 작은 극댓값까지 올라간 뒤 0으로 감소한다. 원점 근처에서는 아래로 볼록(concave up)하고 극대점에서는 위로 볼록(concave down)하므로, $x = \sqrt{2}$의 양쪽에 변곡점(point of inflection)이 있다(수치적으로 $x \approx 0.35$와 $x \approx 2.5$ 근처). 개형을 그리는 데에는 그 정확한 위치가 필요하지 않다.

두 가지는 세로 축척이 매우 다르므로 따로 그린다. 왼쪽에서는 y가 약 -70까지 내려간다. 오른쪽에서는 극댓값 0.2가 보이도록 y축 축척을 늘렸다.



적분

$I = \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x}}{1+x}\,dx$라 하자. x^2을 $1+x$로 나누면

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}.$$

이제 $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1$($u = x$로 두고 부분적분(integration by parts)한다)이고 $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$이므로, 처음 두 항의 기여는 $1-1=0$이고

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}\,dx.$$

(세 적분이 모두 수렴하므로 적분을 이렇게 나누는 것은 정당하다.) $x > 0$이면 $0 < \frac{1}{1+x} < 1$이므로

$$0 < \frac{e^{-x}}{1+x} < e^{-x} \qquad (x > 0).$$

부등식이 구간 전체에서 엄격하고 함수들이 연속이므로, 적분해도 엄격한 부등식이 유지된다.

$$0 < I < \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

따라서 요구한 대로 I는 0과 1 사이에 있다.

다른 방법. 나눗셈을 건너뛸 수도 있다. $x > 0$이면 $\frac{x^2}{1+x} < \frac{x^2}{x} = x$이므로 $0 < f(x) < xe^{-x}$이고 $0 < I < \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1$이다. 그래도 나눗셈은 I가 정확히 어디에서 오는지 보여 주므로 알아 둘 가치가 있다.

검산

- 무작위로 고른 천 개의 점에서 f를 수치적으로 미분한 결과는 $f'(x) = x(2-x^2)e^{-x}/(1+x)^2$과 일치한다.

- $[0, 60]$에서 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 $I \approx 0.59635$이고, $\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$도 같은 값을 주며, 이 값은 0과 1 사이에 넉넉히 들어간다.
- 개형으로부터 대략 어림해 보자. $x > 0$에서 곡선은 높이가 약 0.2인 언덕 모양이고 $x = 6$쯤이면 거의 사라진다. 그 높이와 밑변을 가진 삼각형의 넓이는 약 0.6으로, 0.596과 들어맞는다.

흔한 실수

- $x = -\sqrt{2}$에서의 정류점이 "다른" 가지에 있다는 이유로 놓치거나, 그곳에서 y가 음수라는 이유로 극솟값이라고 하는 것.
- 곡선이 원점에서 축을 가로지른다고 하는 것. 이중 인수 x^2 때문에 곡선은 축에 접한다.
- $\mathrm{e}^{-x} \leq 1$만으로 $I < 1$이라고 주장하는 것. 이 부등식으로 얻는 경계는 $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$인데, 이 적분은 발산한다.

STEP 너머

I의 값은 $\mathrm{e}\,E_1(1) \approx 0.5963$이다. 여기서 $E_1(t) = \int_t^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{-1}\,\mathrm{d}u$는 지수적분(exponential integral)이다. 이 수는 곰퍼츠 상수(Gompertz constant)라고 불린다. 이 수는 초등함수로 나타낼 수 없으며, 그래서 문제에서 경계만 구하라고 한 것이다. 계산할 수 없는 적분을 계산할 수 있는 적분과 비교하여 어림하는 것은 해석학의 핵심 기술이다(이상적분(improper integral)에 대한 "비교판정법(comparison test)"). Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)가 이를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.