풀이

STEP II 1988, 문제 9

순수수학 • 부분군과 합집합

> **STEP II 1988, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q9

이 문제는 *Beyond STEP*의 6.6 절 **부분군의 합집합**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/subgroup-unions.html

핵심 아이디어

귀류법(proof by contradiction)으로 논증한다. 두 부분군(subgroup) 중 어느 것도 군(group) 전체가 아니라면, G_2에만 속하는 원소 하나와 G_1에만 속하는 원소 하나를 고른 뒤, 그 곱(product)이 어디에 속하는지 묻는다. 곱셈에 대한 닫힘성(closure)과 역원(inverse)의 존재를 이용하면, 곱을 어느 부분군에 넣든 모순이 생긴다. 부분군이 세 개라면 곱이 갈 수 있는 다른 곳이 생긴다. 시도해 볼 만한 자연스러운 군은 모든 원소가 자기 자신의 역원인 군이다.

풀이

부분군이 두 개인 경우

G의 모든 원소가 G_1 또는 G_2에 속한다고 하고, 모순을 이끌어 내기 위해 $G_1 \neq G$이고 $G_2 \neq G$라고 가정하자.

$G_1 \neq G$이고 $G_1 \subseteq G$이므로, $a \notin G_1$인 원소 $a \in G$가 존재한다. 모든 원소는 G_1 또는 G_2에 속하므로 $a \in G_2$이다.

같은 방법으로, $G_2 \neq G$이므로 $b \notin G_2$인 원소 $b \in G$가 존재하고, 따라서 $b \in G_1$이다.

그러므로 다음을 얻는다.

$$a \in G_2, \quad a \notin G_1, \qquad\qquad b \in G_1, \quad b \notin G_2.$$

이제 곱 $ab \in G$를 살펴보자. 가정에 의해 이 곱은 G_1 또는 G_2에 속한다.

- $ab \in G_1$인 경우: $b \in G_1$이고 G_1은 부분군이므로 $b^{-1} \in G_1$이고, 따라서 닫힘성에 의해

$$a = (ab)\, b^{-1} \in G_1,$$

  이 되어 $a \notin G_1$에 모순이다.

- $ab \in G_2$인 경우: $a \in G_2$이므로 $a^{-1} \in G_2$이기도 하고, 따라서

$$b = a^{-1}(ab) \in G_2,$$

  이 되어 $b \notin G_2$에 모순이다.

두 경우 모두 불가능하므로 가정이 틀렸다. 즉 $G_1 = G$ 또는 $G_2 = G$이다. ■

? 생각해 보기 G가 유한하다는 사실은 어디에서 사용했는가?

사용하지 않았다. 이 논증은 부분군의 성질(닫힘성과 역원)만 사용하므로, 유한이든 무한이든 모든 군에서 성립한다. 같은 말로, 군은 결코 두 진부분군(proper subgroup)의 합집합(union)이 될 수 없다.

부분군이 세 개인 경우

H를 클라인 4원군(Klein four-group)

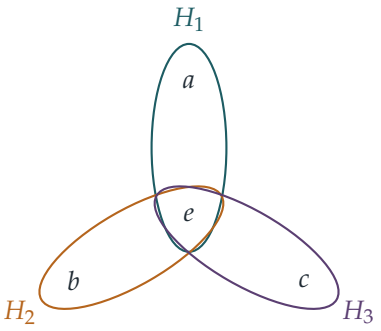
$$H = \{e,\ a,\ b,\ c\}, \qquad a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad ab = ba = c,\ bc = cb = a,\ ca = ac = b.$$

으로 잡자. 구체적으로 H는 각 좌표마다 2를 법으로 하는 덧셈에 대한 $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$이며, 정사각형이 아닌 직사각형의 대칭군(항등변환, 두 개의 반사, 반바퀴 회전)이기도 하다.

항등원(identity)이 아닌 모든 원소의 위수(order)가 2이므로,

$$H_1 = \{e, a\}, \qquad H_2 = \{e, b\}, \qquad H_3 = \{e, c\}$$

는 각각 부분군이다. 각각은 e를 포함하고, 곱셈에 대해 닫혀 있으며(자명하지 않은 곱은 $a \cdot a = e$뿐이고, b와 c도 마찬가지이다), 각 원소가 자기 자신의 역원이다. 각각의 원소는 2개이므로 어느 것도 H가 아니다. 그러나 이들을 모두 합치면 e, a, b, c를 포함하고, 이는 H의 모든 원소이다.



따라서 세 개의 진부분군으로 군을 덮을 수 있다. 또 다른 예로 사원수군(quaternion group) $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$이 있는데, 이 군은 위수가 각각 4인 세 순환 부분군 $\{\pm 1, \pm i\}$, $\{\pm 1, \pm j\}$, $\{\pm 1, \pm k\}$의 합집합이다.

앞의 논증이 여기서 왜 무너지는지 주목하자. $a \notin H_2$이고 $b \notin H_1$일 때, 곱 $ab = c$는 세 번째 부분군 H_3으로 자유롭게 빠져나갈 수 있다.

검산

- 위수가 1부터 12까지인 순환군(cyclic group), S_3, S_4, 위수가 8인 이면체군(dihedral group), Q_8, $\mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_2^3$의 모든 부분군을 전수 탐색한 결과(진부분군의 순서쌍 1278개), 합집합이 군 전체가 되는 쌍은 하나도 없었다.
- 같은 탐색으로 $\{e, a\} \cup \{e, b\} \cup \{e, ab\}$가 클라인 4원군 전체이고, Q_8이 $\langle i \rangle$, $\langle j \rangle$, $\langle k \rangle$의 합집합임을 확인했다. 흥미롭게도 조사한 순환군 중 어느 것도, 그리고 S_3이나 S_4도, 세 진부분군의 합집합이 아니었다.
- 첫 번째 부분에 대한 간단한 확인: 순환군에서 생성원(generator)은 어떤 진부분군에도 속하지 않으므로, 순환군은 진부분군을 몇 개를 써도 덮을 수 없다.

흔한 실수

- 개수 세기로 논증하기: 두 진부분군은 각각 원소가 많아야 $\frac{1}{2}|G|$개이지만 e를 공유하므로, 합집합의 원소는 많아야 $|G| - 1$개이다. 이 개수 세기 증명은 (라그랑주(Lagrange) 정리에 의해) 옳고 짧지만, 유한성과 라그랑주 정리가 반드시 필요하다. 둘 다 명시해야 한다.
- $a \notin G_1$과 $b \notin G_2$를 골라 놓고 $a \in G_2$와 $b \in G_1$을 사용하는 것을 잊는 것. 이 두 사실이 없으면 모순이 나오지 않는다.
- 세 부분군을 제시하면서 모두 진부분군이 아니거나, 아예 부분군이 아닌 것을 제시하는

것(예를 들어 $\{e, a, b\}$는 $ab = c$이므로 닫혀 있지 않다).

STEP 너머

어떤 군이 세 진부분군의 합집합일까? Scorza의 정리(1926)가 답을 준다. 정확히 클라인 4원군과 동형(isomorphic)인 몫군(quotient group)을 갖는 군이며, 이 때문에 클라인 군이 기본적인 예가 된다. 같은 "두 개의 합집합은 불가능" 이라는 사실은 선형대수학(linear algebra)에서도 나타나는데, 무한체(infinite field) 위의 벡터공간(vector space)은 결코 유한 개의 진부분공간(proper subspace)의 합집합이 될 수 없다. 군론 입문서로는 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 읽어 보자.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.