풀이

STEP II 1988, 문제 8

순수수학 • 행렬과 고유벡터

STEP II 1988, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s2-q8

핵심 아이디어

모형의 한 해는 선형사상(linear map)이므로 2×2 행렬 M을 곱하는 것과 같다. 비율이 결코 변하지 않는 개체군은 M이 크기만 바꾸는 벡터, 곧 **고유벡터**(*eigenvector*)이다. 두 고유벡터를 구하고 나면 어떤 초기 개체군이든 각 고유벡터 방향의 성분으로 나눌 수 있고, 각 성분은 해마다 자기 고윳값(eigenvalue)이 곱해질 뿐이다. 따라서 장기적인 운명은 어느 고윳값이 더 큰지, 그리고 그 앞에 붙은 계수의 부호가 무엇인지에 따라 정해진다.

풀이

변하지 않는 비율

개체 수를 열벡터로 쓰면 모형의 한 해는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

비율 $A : B$가 변하지 않는 것은 어떤 수 λ에 대하여 $(A', B') = \lambda(A, B)$일 때, 즉 (A, B)가 M의 고유벡터일 때와 정확히 같다. 고윳값은 다음을 만족한다.

$$\det(M - \lambda I) = \left(\tfrac{1}{4} - \lambda\right)\left(\tfrac{3}{2} - \lambda\right) + \tfrac{3}{8} = \lambda^2 - \tfrac{7}{4}\lambda + \tfrac{3}{4} = 0,$$

따라서 $4\lambda^2 - 7\lambda + 3 = (\lambda - 1)(4\lambda - 3) = 0$이고, $\lambda = 1$ 또는 $\lambda = \frac{3}{4}$이다.

- $\lambda = 1$: 첫째 행에서 $\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B = A$이므로 $A = B$이다. 비율은 1이고, 이러한 개체군은 해마다 정확히 그대로 유지된다.
- $\lambda = \frac{3}{4}$: 첫째 행에서 $\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B = \frac{3}{4}A$이므로 $A = \frac{3}{2}B$이다. 비율은 $\frac{3}{2}$이다. 둘째 행을 확인하면 $\frac{3}{2}B - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}B = \frac{3}{4}B$이다. 두 종 모두 해마다 $\frac{3}{4}$배로 줄어든다.

행렬 없이 같은 것을 보일 수도 있다. $A = rB$이면 새로운 비율은 $\dfrac{\frac{1}{4}r + \frac{3}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}r}$이고, 이것을 r과 같다고 놓으면 $2r^2 - 5r + 3 = 0$이므로 $r = 1$ 또는 $r = \frac{3}{2}$이다. 어느 방법으로든, 비율이 고정될 수 있는 것은 그 비율이 1 또는 $\frac{3}{2}$일 때뿐이며, 이것이 보이려던 것이다. $x = 1, y = \frac{3}{2}$로 둔다.

이후의 해

다음과 같이 쓰자.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

성분을 비교하면 $p + \frac{3}{2}q = a$, $p + q = b$이다. 두 식을 빼면 $\frac{1}{2}q = a - b$이므로

$$q = 2(a - b), \qquad p = b - q = 3b - 2a.$$

M이 선형이므로 한 해가 지나면 첫째 성분에는 1이, 둘째 성분에는 $\frac{3}{4}$가 곱해진다. 따라서 n년 뒤에는 (모형이 여전히 적용되는 한) 다음을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = (3b - 2a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2(a - b)\left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

즉,

$$a_n = (3b - 2a) + 3(a - b)\left(\frac{3}{4}\right)^n,$$
$$b_n = (3b - 2a) + 2(a - b)\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

$(\frac{3}{4})^n \to 0$이므로 개체 수는 평형선 $a = b$ 위의 점 $(3b - 2a,\ 3b - 2a)$로 다가간다.

분류하기 전에 안심할 점이 하나 있다. 땅돼지는 결코 문제를 일으키지 않는다. $a_n \geq 0$이고 $b_n > 0$이면 $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n > 0$이므로, 물소가 살아 있는 동안에는 땅돼지의 수도 양수로 유지된다. 따라서 살펴볼 것은 b_n의 부호뿐이며, 평면에서 $a \geq 0, b > 0$인 영역만 다루면 된다.

> **생각해 보기** b_n이 한동안 0 아래로 내려갔다가 다시 양의 극한을 향해 회복될 수 있을까?

그럴 수 없다. b_n의 식에서 n에 의존하는 것은 $(\frac{3}{4})^n$뿐이고, 이것은 1에서 0으로 꾸준히 감소한다. 따라서 b_n은 $b_0 = b$에서 극한 $3b - 2a$를 향해 단조롭게 움직이고, 모든 b_n은 b와 $3b - 2a$ 사이에 있다. 덕분에 분류가 깔끔해진다.

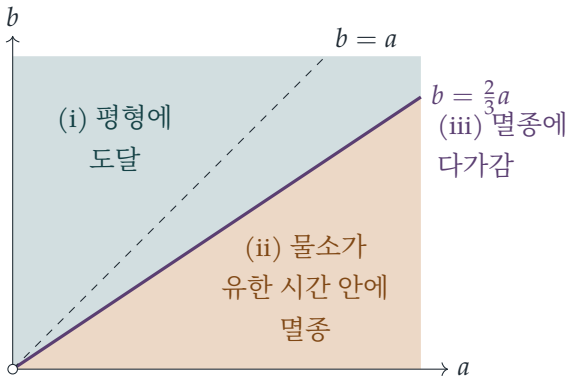
세 영역

(i) $3b - 2a > 0$, 즉 $b > \frac{2}{3}a$이면 b와 $3b - 2a$가 모두 양수이므로 모든 b_n이 양수이고 모형은 영원히 적용된다. 개체군은 영이 아닌 평형(equilibrium) $(3b - 2a,\ 3b - 2a)$로 수

렴한다. 이것은 직선 $b = \frac{2}{3}a$ 위쪽 영역이다(b축 $a = 0$ 포함).

(ii) $3b - 2a < 0$, 즉 $b < \frac{2}{3}a$이면 $a > \frac{3}{2}b > b$이므로 $a - b > 0$이고, b_n은 음수 $3b - 2a$를 향해 순감소한다. 따라서 어떤 유한한 n에서 $b_n \leq 0$이 된다. 즉 물소는 유한한 시간 안에 멸종한다. 이것은 직선 $b = \frac{2}{3}a$와 a축 사이의 영역이다.

(iii) $3b - 2a = 0$, 즉 $a > 0$이고 $b = \frac{2}{3}a$이면 $p = 0$이고 개체군은 순전히 $(\frac{3}{2}, 1)$의 상수배이다. $b_n = b\,(\frac{3}{4})^n$은 모든 n에 대하여 양수이지만 0으로 수렴한다. 물소(와 땅돼지)는 멸종에 다가가지만 결코 멸종에 이르지는 않는다. 이것은 반직선 $b = \frac{2}{3}a$, $a > 0$뿐이다.



점선 $b = a$는 이미 평형 상태에 있는 개체군들로 이루어져 있다. 영역 (i)의 모든 출발점은 직선 $b = \frac{2}{3}a$와 평행하게 미끄러지며 이 점선으로 다가간다($(\frac{3}{2}, 1)$ 방향 성분은 줄어들어 사라지고 $(1, 1)$ 성분은 고정되어 있기 때문이다).

검산

- $n = 0$이면 식에서 $a_0 = 3b - 2a + 3a - 3b = a$, $b_0 = 3b - 2a + 2a - 2b = b$이며, 당연히 그래야 한다.
- 영역 (i)에 있는 $(a, b) = (1, 3)$에서 출발하자. 모형의 한 해를 적용하면 $(\frac{1}{4} + \frac{9}{4},\ \frac{9}{2} - \frac{1}{2}) = (\frac{5}{2}, 4)$이고, 식으로 구하면 $7 - 6(\frac{3}{4}) = \frac{5}{2}, 7 - 4(\frac{3}{4}) = 4$이다. 극한은 $(7, 7)$이다.
- 컴퓨터로 3000개의 무작위 출발점에서 모형을 (분수를 써서) 정확히 반복 계산하여 40년 동안 닫힌 형태의 식이 맞음을 확인했고, 모든 경우에 $3b - 2a$의 부호가 결과를 올바르게 예측함을 확인했다. 여기에는 $b = \frac{2}{3}a$ 위의 점들도 포함되는데, 예를 들어 $(3, 2)$는 5년 뒤 $(\frac{729}{1024}, \frac{243}{512})$가 되어 출발점의 $(\frac{3}{4})^5$배가 된다.

흔한 실수

- 비율을 거꾸로 구하는 것: 문제는 땅돼지 대 물소의 비율을 묻고 있으므로 답은 1과 $\frac{2}{3}$이 아니라 1과 $\frac{3}{2}$이다.
- $b_n \leq 0$이 되면 모형이 멈춘다는 것을 잊고, 음수 "극한"을 갖는 경우까지 포함하여 모든 개체군이 $(3b - 2a, 3b - 2a)$로 수렴한다고 주장하는 것.
- 영역 (iii)을 넓이가 있는 영역으로 설명하는 것: 이것은 (i)과 (ii)의 경계인 반직선 $b = \frac{2}{3}a$일 뿐이다.

STEP 너머

이것은 이산 선형 동역학계(discrete linear dynamical system)이며, 여기서 쓴 방법(대각화(diagonalise)한 다음 각 고윳값을 n제곱하기)은 대학 1학년 선형대수학에서 M^n을 계산하는 방법과 정확히 같다. 고윳값 1은 고정점(fixed point)들로 이루어진 직선을 주고, 고윳값 $\frac{3}{4} < 1$은 감쇠하는 방향을 준다. 시간을 연속으로 바꾸고 λ^n 대신 $e^{\lambda t}$를 쓰면, 같은 그림이 선형 미분방정식(differential equation) 연립계를 지배한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에는 차분방정식(difference equation)과 행렬의 거듭제곱에 관한 좋은 장이 있고, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문)는 연속 버전을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.