풀이

STEP II 1988, 문제 7

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 1988, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q7

핵심 아이디어

여기서 나오는 모든 등식은 치환(substitution)으로 얻어지며, 어려운 부분은 알맞은 치환을 찾는 것이다. 첫 단계에서는 $[1,2]$를 $[0,1]$로 보내면서 $2-2x+x^2$를 $1+t^2$가 들어 있는 식으로 바꾸어 주는 치환이 필요하다. 뫼비우스(Möbius) 사상 $x=2/(1+t)$가 바로 그 역할을 한다. 일단 $1+t^2$가 나타나면 $t=\tan\theta$로 놓는 것이 자연스러운 다음 수순이다. θ에 대한 피적분함수(integrand)는 $\theta=\frac{1}{8}\pi$에 대하여 대칭(symmetric)이고, 구간의 절반에서 $t=\tan\theta$를 되돌리면 $\tan\frac{1}{8}\pi=\sqrt{2}-1$이 등장한다. 마지막 결론은 같은 치환들을 거꾸로 사용하여 얻는다.

풀이

이 풀이 전체에서 k는 임의의 실수 상수이다. 거듭제곱의 밑은 해당 구간에서 모두 양수이므로, 정수가 아닌 지수도 아무 문제를 일으키지 않는다.

$[1,2]$에서 $[0,1]$로

$x=\dfrac{2}{1+t}$로 놓으면 $x=1$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=0$이고, $\mathrm{d}x=-\dfrac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$이다. 그러면

$$2-2x+x^2=\frac{2(1+t)^2-4(1+t)+4}{(1+t)^2}=\frac{2(1+t^2)}{(1+t)^2},\qquad x^{k+1}=\frac{2^{k+1}}{(1+t)^{k+1}}.$$

따라서 피적분함수는

$$\frac{2^k(1+t^2)^k}{(1+t)^{2k}}\cdot\frac{(1+t)^{k+1}}{2^{k+1}}\cdot\frac{2}{(1+t)^2}=\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}},$$

이 되고, $\mathrm{d}x$의 음의 부호가 적분 구간을 $\int_1^0$에서 $\int_0^1$로 뒤바꾼다.

$$I = \int_0^1 \frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t.$$

삼각함수 꼴

이제 $t = \tan\theta$로 놓고, θ는 0부터 $\frac{1}{4}\pi$까지 움직인다. 그러면 $1+t^2 = \sec^2\theta, \mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$이고,

$$1+t = \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)}{\cos\theta},$$

이다. 여기서 $\cos\theta+\sin\theta = \sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{4}\pi\cos\theta+\sin\frac{1}{4}\pi\sin\theta\right)$를 이용하였다. 피적분함수는

$$\begin{aligned}\sec^{2k}\theta\cdot\frac{\cos^{k+1}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)\right]^{k+1}}\cdot\sec^2\theta &= \frac{\cos^{-(k+1)}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)\right]^{k+1}}\\ &= \frac{1}{\left[\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)\right]^{k+1}},\end{aligned}$$

이 된다. $\cos\theta$의 지수를 모두 더하면 $-2k+(k+1)-2 = -(k+1)$이기 때문이다. 두 코사인은 $[0,\frac{1}{4}\pi]$에서 모두 양수이므로, 이 식은 모든 실수 k에 대하여 성립한다. 이로써 I의 두 번째 꼴을 얻는다.

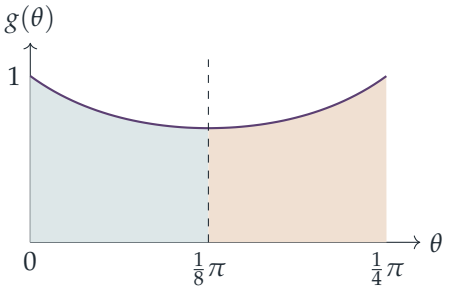
> **?** **생각해 보기** 왜 $[0,\frac{1}{4}\pi]$에서의 적분이 $[0,\frac{1}{8}\pi]$에서의 적분의 두 배가 되어야 할까?

θ에 대한 피적분함수를 $g(\theta)$라 하자. θ를 $\frac{1}{4}\pi-\theta$로 바꾸면 두 인수 $\cos\theta$와 $\cos(\frac{1}{4}\pi-\theta)$가 서로 자리를 바꿀 뿐이므로 $g(\frac{1}{4}\pi-\theta) = g(\theta)$이다. 즉 g의 그래프는 $\theta = \frac{1}{8}\pi$에 대하여 대칭이다. (이는 직접 확인할 수도 있다. $\sqrt{2}\cos\theta\cos(\frac{1}{4}\pi-\theta) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}\cos(2\theta-\frac{1}{4}\pi))$이고, 이 값은 θ와 $\frac{1}{8}\pi$ 사이의 거리에만 의존한다.) 엄밀하게는 $\phi = \frac{1}{4}\pi-\theta$로 치환하면

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/8} g(\tfrac{1}{4}\pi-\phi)\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\pi/8} g(\phi)\,\mathrm{d}\phi,$$

이므로 $[0,\frac{1}{4}\pi]$의 두 절반이 같은 값을 기여하고,

$$I = 2\int_0^{\pi/8} \frac{\mathrm{d}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)\right]^{k+1}}.$$



그림은 $k = 1$일 때의 g를 나타낸다. 색칠한 두 절반은 서로 거울상이다.

따라서 $\sqrt{2}-1$까지의 적분

이제 $[0, \frac{1}{8}\pi]$에서 치환 $t = \tan\theta$를 거꾸로 적용한다. 위 계산의 모든 단계는 그대로이고, 위끝만 $t = \tan\frac{1}{8}\pi$로 바뀐다. $\tau = \tan\frac{1}{8}\pi$라 하면 $\tan\frac{1}{4}\pi = \dfrac{2\tau}{1-\tau^2} = 1$로부터 $\tau^2 + 2\tau - 1 = 0$을 얻으므로 $\tau = -1 \pm \sqrt{2}$이고, 양의 근을 택하면 $\tan\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2}-1$이다. 따라서

$$I = 2\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t,$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다. 이를 같은 피적분함수에 대한 $I = \int_0^1$과 비교하면, $[0, \sqrt{2}-1]$에서의 적분과 $[\sqrt{2}-1, 1]$에서의 적분이 둘 다 $\frac{1}{2}I$와 같다는 사실을 알게 된다. 이것이 다음 단계에서 쓰는 사실이다.

결론 이끌어 내기

좌변. $u = x^2$이라 하면 $\dfrac{2-2x^2+x^4}{x^2} = \dfrac{2-2u+u^2}{u}$로 쓸 수 있다. 그러면 $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{\mathrm{d}u}{2u}$이고, u는 1부터 2까지 움직인다.

$$\int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{2-2x^2+x^4}{x^2}\right)^k \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(2-2u+u^2)^k}{u^k}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}I.$$

우변. 피적분함수는 $\dfrac{(2-2x+x^2)^k}{x^{k+1}}$로 I의 정의에 있는 것과 같지만, 구간이 $[1, \sqrt{2}]$이다. 첫 번째 치환 $x = 2/(1+t)$를 다시 사용한다. 이번에는 $x = \sqrt{2}$가 $1+t = \sqrt{2}$, 즉 $t = \sqrt{2}-1$에 대응하므로

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{2-2x+x^2}{x}\right)^k \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\sqrt{2}-1}^1 \frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= I - \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t = I - \tfrac{1}{2}I = \tfrac{1}{2}I.\end{aligned}$$

양변이 모두 $\frac{1}{2}I$와 같으므로 두 값은 서로 같고, 이것이 증명하려던 결과이다.

검산

- $k = 0$: $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2$이고, 마지막 항등식의 양변은 모두 $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2$로, 마땅히 그래야 하는 값이다.
- $k = 1$: $I = \int_1^2 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right)\mathrm{d}x = 2 - 2\ln 2 \approx 0.61371$이다. I의 다섯 가지 꼴 모두와 마지막 항등식의 양변에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 소수점 아래 열 자리까지 일치한다(각 변은 ≈ 0.30685이다). $k = 0.5$, $k = -0.7$, $k = 4.3$처럼 정수가 아니거나 음수인 k에 대해서도 마찬가지로 일치한다.

흔한 실수

- $\cos\theta + \sin\theta$를 하나의 코사인으로 나타낼 때 인수 $\sqrt{2}$를 빠뜨려서, 엉뚱한 $2^{(k+1)/2}$가 남는 실수.
- I의 값을 직접 계산하려 드는 것. 일반적인 k에 대해서는 닫힌 형태(closed form)가 없으며, 그럴 필요도 없다. 모든 단계는 변수변환(change of variable)이거나 대칭성이다.
- 결론을 이끌어 낼 때, 우변이 I의 **일부**일 뿐이어서 마무리하려면 "따라서(hence)" 부분의 결과가 필요하다는 점을 놓치는 것.

STEP 너머

사상 $x \mapsto 2/(1+t)$는 뫼비우스 변환(분수 선형 변환, fractional linear transformation)이다. 이러한 사상은 원과 직선을 원과 직선으로 보내며, 이차식으로 이루어진 피적분함수에 대한 자연스러운 변수변환이다. 여기서 $\theta \mapsto \frac{1}{4}\pi - \theta$의 경우처럼 피적분함수에 숨어 있는 대칭성을 알아차리는 것은, 초등함수인 원시함수(antiderivative)가 없는 정적분(definite integral)을 계산할 때 쓰는 표준적인 기법이다. 뫼비우스 변환에 대해 더 알고 싶다면 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 읽어 보라. 이런 유형의 적분을 훨씬 더 많이 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 고급 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.