풀이

STEP II 1988, 문제 6

순수수학 • 쌍곡선 함수 부등식

STEP II 1988, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s2-q6

핵심 아이디어

세 함수는 모두 $x = 0$에서 값이 0이므로, $x > 0$에서 증가(increasing)함을 보이면 충분하다. 도함수(derivative)들은 각 소문항이 다음 소문항으로 이어지도록 짜여 있다. (ii)의 도함수에는 (i)의 함수가 들어 있고, (iii)의 도함수는 (ii)의 함수를 변수만 바꾸어 놓은 것이다. f에 대해서는 로그미분(logarithmic differentiation)을 하면 f′의 부호가 (iii)의 함수의 부호로 바뀌는데, 분명히 그 소문항은 바로 이것을 위해 마련된 것이다.

풀이

풀이 전체에서 다음 원리를 쓴다. $F(0) = 0$이고 모든 $x > 0$에 대하여 $F'(x) > 0$이면, 모든 $x > 0$에 대하여 $F(x) > 0$이다. (평균값 정리(mean value theorem)에 의하여 어떤 $\xi \in (0, x)$에 대하여 $F(x) = F(x) - F(0) = xF'(\xi)$이기 때문이다.)

소문항 (i)

$g(x) = x - \tanh x$라 하자. 그러면 $g(0) = 0$이고, $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$를 이용하면

$$g'(x) = 1 - \operatorname{sech}^2 x = \tanh^2 x,$$

이다. $x > 0$이면 $\tanh x > 0$이므로 $g'(x) > 0$이다. 따라서 $x > 0$에서 $x - \tanh x > 0$이다.

소문항 (ii)

$h(x) = x \sinh x - 2 \cosh x + 2$라 하자. 그러면 $h(0) = 0 - 2 + 2 = 0$이고

$$h'(x) = \sinh x + x \cosh x - 2 \sinh x = x \cosh x - \sinh x = \cosh x \, (x - \tanh x).$$

$x > 0$이면 $\cosh x > 0$이고, 소문항 (i)에 의하여 $x - \tanh x > 0$이므로 $h'(x) > 0$이다. 따라서 $x > 0$에서 $h(x) > 0$이다.

소문항 (iii)

$k(x) = 2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x$라 하자. 그러면 $k(0) = 0$이고

$$\begin{aligned} k'(x) &= 2\cosh 2x + 4x\sinh 2x - 6\cosh 2x + 4 \\ &= 4x\sinh 2x - 4\cosh 2x + 4. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** 이 조합을 전에 어디에서 보았는가?

$u = 2x$로 놓으면 이 식은 $2u\sinh u - 4\cosh u + 4 = 2\left(u\sinh u - 2\cosh u + 2\right) = 2h(u)$이다. $2x > 0$이므로 소문항 (ii)에 의하여

$$k'(x) = 2h(2x) > 0 \quad \text{단, } x > 0,$$

이다. 따라서 $x > 0$에서 $k(x) > 0$이다.

f에는 극점이 없다

$x > 0$이면 $\mathrm{f}(x)$의 모든 인수가 양수이므로 $\mathrm{f}(x) > 0$이고, 따라서 로그를 취할 수 있다.

$$\ln \mathrm{f}(x) = \ln x + \tfrac{1}{3}\ln\cosh x - \ln\sinh x.$$

미분하면

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{x} + \frac{\sinh x}{3\cosh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{3\sinh x\cosh x + x\sinh^2 x - 3x\cosh^2 x}{3x\sinh x\cosh x}.$$

이제 $\sinh x\cosh x = \frac{1}{2}\sinh 2x$, $\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$, $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$을 이용하여 분자를 배각(double angle)으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} 3\sinh x\cosh x + x\sinh^2 x - 3x\cosh^2 x &= \tfrac{3}{2}\sinh 2x + \tfrac{x}{2}(\cosh 2x - 1) - \tfrac{3x}{2}(\cosh 2x + 1) \\ &= \tfrac{3}{2}\sinh 2x - x\cosh 2x - 2x \\ &= -\tfrac{1}{2}(2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x). \end{aligned}$$

그러므로

$$\mathrm{f}'(x) = -\frac{\mathrm{f}(x)\left(2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x\right)}{6x\sinh x\cosh x}.$$

$x > 0$이면 괄호 안은 소문항 (iii)에 의하여 양수이고, $\mathrm{f}(x)$, x, $\sinh x$, $\cosh x$도 모두 양수이다. 따라서 모든 $x > 0$에 대하여 $\mathrm{f}'(x) < 0$이다. 즉 f'은 결코 0이 되지 않으므로 f에는 극점(turning point)이 없으며, 실제로 f는 $x > 0$에서 순감소(strictly decreasing)한다.

그래프 그리기

양 끝에서의 행동을 알아야 한다.

$x \to 0^+$**일 때:** $x/\sinh x \to 1$이고 $(\cosh x)^{1/3} \to 1$이므로 $f(x) \to 1$이다. 좀 더 자세히 보면 $(\cosh x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$이고 $x/\sinh x = 1 - \frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$이므로 x^2 항은 서로 소거된다. 각 급수에서 항을 하나씩 더 구하면

$$f(x) = 1 - \tfrac{1}{45}x^4 + O(x^6).$$

따라서 곡선은 (포함되지 않는) 점 $(0,1)$에서 기울기 0으로 매우 평평하게 출발한다.

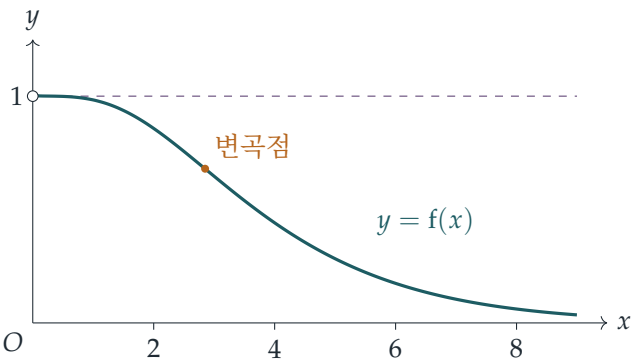
$x \to \infty$**일 때:** $\cosh x \sim \frac{1}{2}e^x$이고 $\sinh x \sim \frac{1}{2}e^x$이므로

$$f(x) \sim \frac{x\,(\frac{1}{2}e^x)^{1/3}}{\frac{1}{2}e^x} = 2^{2/3}\,x\,e^{-2x/3} \to 0,$$

이다. 지수함수가 x의 거듭제곱보다 빠르게 변하기 때문이다. x축은 점근선(asymptote)이고, $f > 0$이므로 곡선은 항상 x축 위에 있다.

> **생각해 보기** 곡선은 평평하게 시작해서 평평하게 끝나지만 언제나 감소한다. 이로부터 무엇이 반드시 성립하는가?

0 근처에서 곡선은 아래로 휘고(곡선은 $1 - x^4/45$와 같다), x가 클 때는 감소하는 지수함수이므로 위로 휜다. 따라서 그 사이에 변곡점(point of inflection)이 적어도 하나 있어야 한다. 수치적으로 계산하면 변곡점은 하나이고, $x \approx 2.85$ 근처에 있으며 이때 $f \approx 0.68$이다. 몇 가지 값은 다음과 같다. $f(1) \approx 0.983$, $f(2) \approx 0.858$, $f(4) \approx 0.441$, $f(6) \approx 0.174$.



검산

- $x = 1$에서: $1 - \tanh 1 \approx 0.238$, $\sinh 1 - 2\cosh 1 + 2 \approx 0.089$, $2\cosh 2 - 3\sinh 2 + 4 \approx 0.643$으로 모두 양수이다.

- 항등식 $\mathrm{f}'/\mathrm{f} = -k(x)/(6x\sinh x\cosh x)$는 아무 점에서나 확인해 볼 수 있다. $x = 1$에서 양변은 모두 약 -0.0592이고, f의 수치 미분값도 이와 일치한다.
- 수치적으로 x가 작을 때 $(1-\mathrm{f}(x))/x^4 \approx 0.0222 \approx \frac{1}{45}$이고, x가 클 때 $\mathrm{f}(x)/(2^{2/3}xe^{-2x/3}) \to 1$이다.

흔한 실수

- 도함수가 양수라는 것만 보이고, $x = 0$에서 함수값이 0인지 확인하는 것을 잊는 실수. 두 가지 모두 필요하다.
- 몫의 미분법(quotient rule)과 곱의 미분법(product rule)으로 f를 직접 미분하려는 시도. 이 방법도 되기는 하지만, 로그미분이 훨씬 깔끔하고 (iii)과의 연결을 분명히 보여 준다.
- 곡선이 x축을 가로지르거나 원점에서 출발하도록 그리는 실수. 곡선은 높이 1(이 값에 도달하지는 않는다)에서 출발하고 항상 양수이다.

STEP 너머

$F(0) = 0$과 $F' > 0$으로부터 $F(x) > 0$을 증명하는 기법은 평균값 정리를 실제로 활용하는 예이며, 이 풀이에서 k', h', g'을 거쳐 간 것처럼 이를 연쇄적으로 적용하는 것은 해석학(analysis)에서 함수 사이의 부등식을 증명하는 표준적인 방법이다. 전개식 $\mathrm{f}(x) = 1 - x^4/45 + \cdots$은 거듭제곱급수(power series)를 다루는 맛보기로, 대학 1학년 해석학에서 이를 엄밀한 기초 위에 세운다. 두 가지를 모두 읽어 보기에 좋은 책은 Abbott, *Understanding Analysis*이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.