풀이

STEP II 1988, 문제 5

순수수학 • 1의 거듭제곱근과 탄젠트

STEP II 1988, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s2-q5

핵심 아이디어

$z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$로 놓고 이항정리(binomial theorem)로 z^7을 전개한다. 허수부(imaginary part)는 $\sin 7\theta$이고, 이를 $\cos^7\theta$로 나누면 $t = \tan\theta$에 대한 다항식(polynomial)이 된다. 1의 7제곱근(seventh roots of unity)은 $\sin 7\theta$를 0으로 만들므로, 7차 다항식의 근 일곱 개를 거저 얻게 된다. 그다음 탄젠트의 곱은 근들의 곱일 뿐이며, 상수항(constant term)에서 바로 읽어 낼 수 있다.

풀이

6차 다항식(sextic)의 근

드무아브르 정리(de Moivre's theorem)에 의해 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + \mathrm{i}\sin 7\theta$이다. $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$로 쓰자. 좌변을 이항정리로 전개하고 is의 홀수 제곱이 들어 있는 항만 남기면

$$\sin 7\theta = 7c^6 s - 35c^4 s^3 + 21c^2 s^5 - s^7.$$

을 얻는다. $\cos\theta \neq 0$이면 c^7로 나누고 $t = \tan\theta$로 놓을 수 있다.

$$\frac{\sin 7\theta}{\cos^7\theta} = 7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7 = -t\,(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7). \qquad (*)$$

$z^7 = 1$의 근은 $\theta = \frac{2k\pi}{7}$일 때의 $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$이고, 이때 $z^7 = 1$의 허수부인 $\sin 7\theta = \sin 2k\pi = 0$이다. $\theta = \frac{k\pi}{7}$, $k = 0, 1, \ldots, 6$을 쓰는 편이 조금 더 깔끔한데, 이 경우에도 $\sin 7\theta = \sin k\pi = 0$이다(그리고 tan의 주기가 π이므로 같은 탄젠트 값들의 집합을 얻는다).

이러한 각 θ에 대하여

- $\frac{k\pi}{7} = \frac{\pi}{2}$가 되려면 $2k = 7$이어야 하므로 $\cos\theta \neq 0$이다. 따라서 $(*)$가 성립한다.
- $\sin 7\theta = 0$이므로 $(*)$에 의해 수 $t = \tan\frac{k\pi}{7}$은 $p(t) = t^7 - 21t^5 + 35t^3 - 7t$의 근이다.

일곱 개의 값 $\tan\frac{k\pi}{7}$ $(k = 0, \ldots, 6)$은 서로 다르다. 각 $0, \frac{\pi}{7}, \ldots, \frac{6\pi}{7}$은 $[0, \pi)$의 서로 다른 점이고 어느 것도 $\frac{\pi}{2}$와 같지 않으며, tan은 $[0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$에서 일대일(one-to-one)이기 때문이다($[0, \frac{\pi}{2})$에서는 양수이면서 증가하고, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에서는 음수이면서 역시 증가하며, 두 조각은 각각 $[0, \infty)$와 $(-\infty, 0)$의 값을 가진다).

? **생각해 보기** 근의 일부가 아니라 **모든** 근을 찾았다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

7차 다항식의 근은 많아야 7개이다. 서로 다른 근을 7개 찾았으므로 이것이 근의 전부이다. $k = 0$일 때 $t = 0$이 되는데, 이는 인수 t에서 나오는 근이다. 따라서 $t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0$의 근은 정확히

$$t = \tan\frac{k\pi}{7}, \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

이고, $\tan\frac{(7-k)\pi}{7} = -\tan\frac{k\pi}{7}$이므로 이는 곧 $\pm\tan\frac{\pi}{7}, \pm\tan\frac{2\pi}{7}, \pm\tan\frac{3\pi}{7}$이다.

곱 $\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7}$

차수가 짝수인 모닉 다항식(monic polynomial, 최고차항의 계수가 1인 다항식)에서 근들의 곱은 상수항과 같다. 따라서

$$\left(\tan\tfrac{\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{\pi}{7}\right)\left(\tan\tfrac{2\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{2\pi}{7}\right)\left(\tan\tfrac{3\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{3\pi}{7}\right) = -7,$$

이고, 이는

$$\left(\tan\tfrac{\pi}{7}\tan\tfrac{2\pi}{7}\tan\tfrac{3\pi}{7}\right)^2 = 7.$$

임을 뜻한다. 세 각은 모두 $(0, \frac{\pi}{2})$에 있으므로 각 탄젠트는 양수이고, 곱은 양의 제곱근이다. $\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$.

이제 $\tan(\pi - x) = -\tan x$를 이용하면 $\tan\frac{4\pi}{7} = -\tan\frac{3\pi}{7}$이고 $\tan\frac{6\pi}{7} = -\tan\frac{\pi}{7}$이다. 두 음의 부호가 상쇄되므로

$$\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7} = \tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}\tan\frac{\pi}{7} = \sqrt{7},$$

이 되어 증명이 끝난다.

$n = 9$와 $n = 11$인 경우

같은 논증이 임의의 홀수 $n = 2m + 1$에 대해 성립한다. $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$의 허수부를 취하고 $\cos^n\theta$로 나누면

$$\frac{\sin n\theta}{\cos^n\theta} = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{n}{2r+1}t^{2r+1} = t\,q_n(t),$$

이다. 여기서 q_n은 차수가 $2m = n-1$이고 최고차항 계수(leading coefficient)가 $(-1)^m$이며 상수항이 $\binom{n}{1} = n$이다. 구체적으로 쓰면

$$q_9(t) = t^8 - 36t^6 + 126t^4 - 84t^2 + 9,$$
$$q_{11}(t) = -t^{10} + 55t^8 - 330t^6 + 462t^4 - 165t^2 + 11.$$

이다. 앞에서와 똑같이(n이 홀수이므로 어떤 $\frac{k\pi}{n}$도 $\frac{\pi}{2}$와 같지 않다), q_n의 근은 서로 다른 $n-1$개의 수 $\tan\frac{k\pi}{n}$, $k = 1, \dots, n-1$이고, 이들은 $k = 1, \dots, m$에 대하여 $\pm\tan\frac{k\pi}{n}$으로 짝을 이룬다. 차수가 짝수이므로 q_n의 근들의 곱은 (상수항)/(최고차항 계수)이다.

$$(-1)^m \prod_{k=1}^{m} \tan^2\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{(-1)^m} \quad\Longrightarrow\quad \prod_{k=1}^{m} \tan\frac{k\pi}{n} = \sqrt{n},$$

이때 이 각들이 모두 $(0, \frac{\pi}{2})$에 있으므로 양의 제곱근을 택한다. $n = 9$일 때 이는 q_9의 상수항 9를 최고차항 계수 1로 나눈 것이고, $n = 11$일 때는 $11/(-1) = -11 = (-1)^5\prod\tan^2$이다. 어느 경우든 $k = 1, \dots, m$에 대한 $\tan\frac{k\pi}{n}$의 곱은 $n = 9$일 때 3, $n = 11$일 때 $\sqrt{11}$이다.

> ? **생각해 보기** 구하려는 곱의 각은 $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots$이 아니라 $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots$이다. 한쪽에서 다른 쪽으로 어떻게 넘어갈 수 있으며, 부호는 어떻게 될까?

$2j \le m$인 짝수 배수는 이미 목록 $1, \dots, m$에 들어 있다. $2j > m$인 짝수(즉 $2j > \frac{n}{2}$)는 $\tan\frac{2j\pi}{n} = -\tan\frac{(n-2j)\pi}{n}$을 주며, $n-2j$는 홀수이고 m 이하이다. 짝수는 첫째 경우에서, 홀수는 둘째 경우에서 나오므로, 1부터 m까지의 모든 수가 이런 식으로 정확히 한 번씩 나타난다. 따라서 구하려는 곱은 $\pm\sqrt{n}$이고, $\frac{n}{2}$와 n 사이의 짝수 하나마다 음의 부호가 하나씩 붙는다.

- $n = 9$: 짝수는 $2, 4, 6, 8$이고, 그중 4.5보다 큰 것은 $6, 8$이므로 음의 부호가 두 개이다. 따라서
$$\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}\tan\frac{6\pi}{9}\tan\frac{8\pi}{9} = \sqrt{9} = 3.$$
- $n = 11$: 짝수는 $2, 4, 6, 8, 10$이고, 그중 5.5보다 큰 것은 $6, 8, 10$이므로 음의 부호가 세 개이다. 따라서
$$\tan\frac{2\pi}{11}\tan\frac{4\pi}{11}\tan\frac{6\pi}{11}\tan\frac{8\pi}{11}\tan\frac{10\pi}{11} = -\sqrt{11}.$$

($n = 7$일 때는 3.5보다 큰 짝수가 $4, 6$으로 부호가 두 개이며, 그래서 그 곱이 양수로 나왔던 것이다.)

검산

- $n = 9$는 부분적으로 쉽게 검산할 수 있다. $\tan\frac{6\pi}{9} = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$이고, 수치적으로 $\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}\tan\frac{8\pi}{9} \approx 0.8391 \times 5.6713 \times (-0.3640) \approx -1.732 = -\sqrt{3}$이므로 전체 곱은 3이다.

- 계산기로 계산하면 $\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7} \approx 2.645751$이고 $\sqrt{7} \approx 2.645751$이다. $n = 11$의 곱은 $\approx -3.316625 = -\sqrt{11}$이다.
- $\tan\frac{\pi}{7} \approx 0.4816$을 대입하면 예상대로 $t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 \approx 0$이 된다.

흔한 실수

- $\cos^7\theta$가 0이 아님을 확인하지 않고 나누거나, 일곱 개의 탄젠트 값이 서로 다르다는 것을 논증하지 않는 것. 이 점들을 짚지 않으면 **모든** 근을 찾았음을 보인 것이 아니다.
- $n = 11$에서 부호를 틀리는 것. 곱의 제곱은 쉽게 구할 수 있지만, 부호를 정하려면 음수인 탄젠트의 개수를 세어야 한다.
- $a_d t^d + \cdots + a_0$의 근들의 곱이 $(-1)^d a_0/a_d$라는 것을 잊는 것. 이는 최고차항 계수가 -1인 $n = 11$에서 중요하다.

STEP 너머

수 $\tan\frac{k\pi}{n}$은 대수적 수(algebraic number)이고, 다항식 q_n은 (n이 소수일 때) 유리수체 위에서 이 수들의 최소다항식(minimal polynomial)이다. $\prod\tan\frac{k\pi}{n} = \sqrt{n}$과 같은 항등식은 가우스(Gauss) 합(Gauss sum)의 그림자이다. 가우스 합은 $\sqrt{\pm p}$가 1의 p제곱근들로 생성되는 체에 속함을 보여 주며, 이는 대수적 정수론(algebraic number theory)의 초석이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*은 이러한 아이디어들로 부드럽게 들어가는 입문서이고, Needham의 *Visual Complex Analysis*는 1의 거듭제곱근에 대한 기하학적 감각을 길러 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.