풀이

STEP II 1988, 문제 4

순수수학 • 복소평면 위의 자취

> **STEP II 1988, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q4

핵심 아이디어

복소수(complex number)를 $a + \mathrm{i}b$ 꼴로 쓰고, "실수이다" 또는 "허수이다"라는 조건을 a와 b에 관한 하나의 실수 방정식으로 바꾼다. 그러면 아르강 도표(Argand diagram)에서 익숙한 곡선이 나온다. 이제 제곱은 평면에서 평면으로 가는 사상(map)이 되고, x와 y(또는 p와 q)를 a와 b로 나타낸 뒤 소거(elimination)하여 그 곡선이 어디로 옮겨지는지 찾는다.

인쇄된 문제에 대해 한마디 해 둔다. 문제에는 $w^2 - 2x$라고 적혀 있지만, 그 시점에서는 x가 아직 도입되지 않았고, 마지막 부분($t^2 - 2t$가 나오는 부분)을 보면 의도한 조건이 무엇인지 알 수 있다. 따라서 이 조건을 $w^2 - 2w$**가 실수이다**로 읽는다.

풀이

소문항 (i)

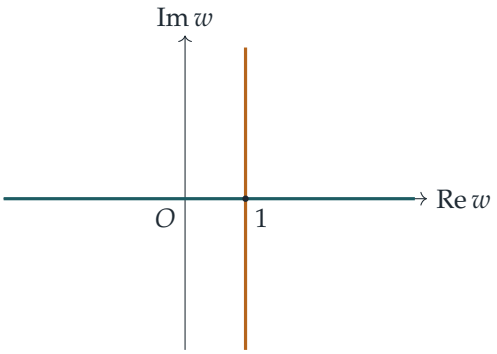
a, b를 실수로 하여 $w = a + \mathrm{i}b$라 하자. 그러면

$$w^2 - 2w = (a^2 - b^2 - 2a) + \mathrm{i}\,(2ab - 2b) = (a^2 - b^2 - 2a) + 2\mathrm{i}\,b(a - 1).$$

이 값은 허수부가 0일 때, 그리고 그때에만 실수이므로, 조건은

$$b(a - 1) = 0, \qquad \text{즉,} \qquad b = 0 \ \text{또는}\ a = 1.$$

따라서 w의 자취(locus)는 실수축(real axis)과 수직선 $\mathrm{Re}\, w = 1$을 합친 것이다. 두 직선은 $w = 1$에서 만난다.



소문항 (ii)

두 직선을 각각 따로 제곱한다.

실수축. $b = 0$이면 $w = a$는 실수이고 $w^2 = a^2$이다. 따라서 $y = 0$이고 $x = a^2 \geq 0$이며, a가 실수 전체를 움직일 때 a^2은 $[0, \infty)$의 모든 값을 취한다. 자취의 이 부분은 x축의 음이 아닌 부분, 즉 반직선(half-line) $y = 0, x \geq 0$이다.

직선 $a = 1$. $w = 1 + \mathrm{i}b$이면

$$w^2 = 1 - b^2 + 2\mathrm{i}b, \qquad \text{따라서} \qquad x = 1 - b^2, \quad y = 2b.$$

$b = \frac{1}{2}y$를 소거하면

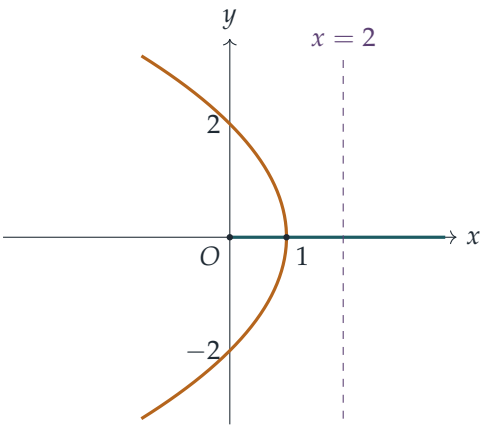
$$x = 1 - \tfrac{1}{4}y^2, \qquad \text{또는} \qquad y^2 = 4(1 - x) = -4(x - 1).$$

$b = \frac{1}{2}y$로 잡으면 이 곡선의 모든 점에 도달한다. 이것은 축이 x축 위에 있고 꼭짓점(vertex)이 $(1, 0)$이며 x의 음의 방향으로 열린 포물선(parabola)이다. 표준형 $Y^2 = 4cX$와 비교하면, $X = x - 1$일 때 $c = -1$이다. 따라서 초점(focus)은 $X = -1$, 즉 원점이고, 준선(directrix)은 $X = 1$, 즉 직선 $x = 2$이다. 실제로 $x^2 + y^2 = x^2 + 4 - 4x = (2 - x)^2$이므로, 모든 점은 O까지의 거리와 직선 $x = 2$까지의 거리가 같다. 포물선은 y축과 $(0, \pm 2)$에서 만난다.

? 생각해 보기 반직선이 왜 x의 음의 방향으로는 뻗지 않을까?

w평면의 실수축은 (a와 $-a$에 의해) 두 번 덮이지만, 실수를 제곱하면 결코 음수가 나오지 않는다. 그래서 실수축 전체가 음이 아닌 절반 위로 접힌다. 마찬가지로 $b \mapsto 2b$가 일대일(one-to-one)이므로, 직선 $\mathrm{Re}\, w = 1$은 포물선 위로 한 번씩만 옮겨진다.

따라서 (x, y)의 자취는 초점이 원점이고 준선이 $x = 2$인 포물선 $y^2 = 4(1 - x)$와 반직선 $y = 0, x \geq 0$을 합친 것이다. 이 반직선은 초점에서 출발하여 꼭짓점 $(1, 0)$을 지나는데, 이 꼭짓점은 소문항 (i)의 두 직선이 만나는 점 $w = 1$의 상(image)이다.



마지막 부분

$t = a + \mathrm{i}b$라 하자. 여기서 "허수이다"는 순허수(purely imaginary)라는 뜻이므로, $t^2 - 2t$의 실수부가 0이어야 한다.

$$a^2 - b^2 - 2a = 0, \qquad \text{즉,} \qquad (a-1)^2 - b^2 = 1.$$

따라서 t는 중심이 1이고 꼭짓점이 $t = 0$과 $t = 2$인 직각쌍곡선(rectangular hyperbola) 위에 있다. 이 곡선 위에서 $b^2 = a^2 - 2a = a(a-2) \geq 0$이므로 $a \leq 0$ 또는 $a \geq 2$이다.

이제 $t^2 = p + \mathrm{i}q$로 두면

$$p = a^2 - b^2 = 2a, \qquad q = 2ab,$$

이다. 여기서 p를 간단히 하는 데 쌍곡선의 방정식 $a^2 - b^2 = 2a$를 썼다. 따라서 $a = \frac{1}{2}p$이고,

$$q^2 = 4a^2b^2 = 4a^2(a^2 - 2a) = p^2\left(\tfrac{1}{4}p^2 - p\right), \qquad \text{따라서} \qquad 4q^2 = p^3(p-4).$$

조건 $a \leq 0$ 또는 $a \geq 2$는 $p \leq 0$ 또는 $p \geq 4$가 되는데, 이것은 정확히 $p^3(p-4) \geq 0$인 범위이다. 역으로 이 곡선 위의 한 점을 잡자. $p \neq 0$이면 $a = \frac{1}{2}p$, $b = q/p$로 둔다. 그러면 $b^2 = q^2/p^2 = \frac{1}{4}p(p-4) = a^2 - 2a$이므로 t는 쌍곡선 위에 있고, $t^2 = (a^2 - b^2) + 2\mathrm{i}ab = p + \mathrm{i}q$이다. $p = 0$이면 $q = 0$이고, 이 점은 $t = 0$에서 온다. 따라서 자취는 곡선

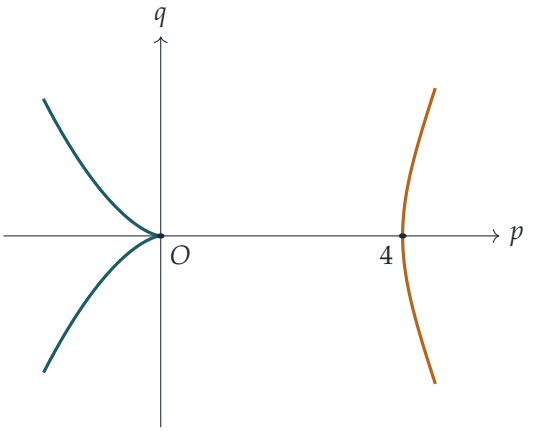
$$4q^2 = p^3(p-4).$$

전체이다.

곡선의 모양은 다음과 같다.

- q^2만 나타나므로 p축에 대하여 대칭이다.
- $0 < p < 4$인 점은 없다. 곡선은 두 조각으로 이루어지며, 각 조각은 쌍곡선의 각 가지에서 하나씩 나온다.

- 오른쪽 조각은 $t = 2$의 상인 $(4, 0)$에서 시작한다. 그 근처에서 $q^2 \approx 16(p-4)$이므로 접선(tangent)은 수직이다.
- 왼쪽 조각은 $t = 0$의 상인 원점을 지난다. 그 근처에서 $q^2 \approx -p^3$이므로 $|q| \approx |p|^{3/2}$이고, 이는 오른쪽을 향하는 첨점(cusp)으로, 두 갈래 모두 p축에 접한다.
- $|p|$가 클 때 $|q| \approx \frac{1}{2}p^2$이므로, 두 조각 모두 포물선처럼 벌어진다.



(세로 방향은 축소하여 그렸다. 청록색 조각은 쌍곡선에서 $\operatorname{Re} t \le 0$인 가지에서, 호박색 조각은 $\operatorname{Re} t \ge 2$인 가지에서 나온다.)

검산

- 소문항 (i): $w = 1 + 2\mathrm{i}$이면 $w^2 - 2w = (-3 + 4\mathrm{i}) - (2 + 4\mathrm{i}) = -5$로 실수이다. 소문항 (ii): 그 제곱 $-3 + 4\mathrm{i}$는 $16 = 4(1 - (-3))$을 만족한다.
- 마지막 부분: $t = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$은 $1 - 3 + 2 = 0$을 만족한다. 그 제곱은 $-2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$이고, $4q^2 = 48 = (-8)(-6) = p^3(p-4)$이다.
- 수천 개의 무작위 점에서 수치적으로 확인하여, 각 자취가 제시한 곡선 위로 옮겨지고 각 곡선의 모든 점에 도달함을 검증하였다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 실수축을 빠뜨려 소문항 (ii)에서 반직선을 놓치는 경우. 또는 $x \ge 0$인 부분만이 아니라 x축 전체를 그리는 경우.
- $a^2 - b^2 = 2a$를 이용해 $p = 2a$를 얻지 않는 경우. 이것 없이는 소거가 훨씬 복잡해진다.
- 마지막 그림에서 빈 구간 $0 < p < 4$나 원점의 첨점을 놓치는 경우.

STEP 너머

제곱 사상 $z \mapsto z^2$은 가장 간단한 등각사상(conformal map)이다. 이 사상은 각을 두 배로 만들며, 그래서 여기서 직선과 쌍곡선이 포물선과 첨점이 있는 곡선으로 바뀐다. $z = 0$에서는 도함수(derivative)가 0이 되어 각이 더 이상 보존되지 않는데, 첨점은 바로 여기서 생긴다. 유체 흐름과 정전기학에서는 이런 사상을 이용해 다루기 어려운 영역을 쉬운 영역으로 바꾸는 것이 표준적인 기법이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 사상을 그림으로 훌륭하게 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.