풀이

STEP II 1988, 문제 3

순수수학 • 근의 대칭성

> **STEP II 1988, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q3

핵심 아이디어

계수부터 다루지 말고 근의 집합을 다룬다. 주어진 성질은 근의 집합이 연산 $k \mapsto 1/k$에 의해 변하지 않는다는 뜻이므로, 두 근이 서로 바뀌거나 각 근이 고정된다. 두 번째 연산 $k \mapsto 1-k$를 추가해도 같은 방식으로 작동한다. 삼차방정식에서는 두 연산을 반복해서 적용하면 하나의 근에서 최대 여섯 개의 값이 만들어지는데, 삼차방정식에는 근이 세 개까지만 들어갈 수 있다. 따라서 근은 여섯 개의 값 가운데 일부가 겹치는 특별한 점에 있어야 한다.

풀이

역수 성질

두 근을 α와 β라 하자(같을 수도 있고 복소수일 수도 있다). 그러면 $\alpha+\beta=-b$이고 $\alpha\beta=c$이다. 먼저, 0^{-1}은 존재하지 않으므로 0은 근이 될 수 없다. 따라서 $c\neq 0$이다.

사상(map) $k \mapsto 1/k$는 각 근을 근으로 보내야 하므로 $1/\alpha \in \{\alpha, \beta\}$이다.

- $1/\alpha=\beta$이면 $\alpha\beta=1$, 즉 $c=1$이다. 역으로 $c=1$이면 두 근은 0이 아니고 $\beta=1/\alpha$이므로 각 근의 역수는 다른 근이 되며, 이 성질은 **모든** 실수 b에 대해 성립한다. (여기에는 $b=\mp 2$일 때의 중근 ± 1과 $|b|<2$일 때 단위원 위에 있는 복소수 근이 포함된다.)
- $1/\alpha=\alpha$이지만 $1/\alpha\neq\beta$이면 $\alpha=\pm 1$이고 $\alpha\beta\neq 1$이다. 이 성질을 β에 적용하면, $\alpha\beta\neq 1$이므로 β의 역수는 α가 아니다. 따라서 $1/\beta=\beta$이고 $\beta=\pm 1$이기도 하다. $\alpha\beta\neq 1$이므로 두 근은 1과 -1이어야 하고, 이로부터 $x^2-1=0$, 즉 $b=0, c=-1$을 얻는다. 이 방정식은 실제로 이 성질을 가진다.

따라서 이 성질은 정확히 다음과 같은 경우에 성립한다.

$$c = 1 \ (b\text{는 임의의 실수}), \qquad \text{또는} \qquad b = 0,\ c = -1.$$

성질 $k \mapsto 1 - k$ 추가하기

$1/k$ 대신 $1 - k$를 넣어 같은 논증을 한다. $1 - \alpha = \beta$이어서 $\alpha + \beta = 1$이거나, 두 근이 모두 고정되어 $1 - \alpha = \alpha$이고 $1 - \beta = \beta$이다. 후자의 경우 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$이므로 역시 $\alpha + \beta = 1$이다. 어느 경우든 $b = -1$이고, 역으로 $b = -1$이면 두 근이 α와 $1 - \alpha$가 되므로 이 성질이 성립한다.

$b = 0, c = -1$인 경우는 이 조건을 만족하지 않으므로 $c = 1$이고 $b = -1$이어야 한다.

$$b = -1, \qquad c = 1,$$

이로부터 $x^2 - x + 1 = 0$을 얻고, 그 근은 $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$이다. 각 근은 절댓값(modulus)이 1이고 실수부가 $\frac{1}{2}$이므로, $1/k$와 $1 - k$는 모두 켤레복소수(complex conjugate) $\bar{k}$, 즉 다른 근과 같다.

삼차방정식

이제 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$이 실수 계수를 가지고 두 성질을 모두 만족한다고 하자. 앞에서와 마찬가지로 0은 근이 아니며, 1도 근이 아니다(그렇지 않으면 $1 - 1 = 0$이 근이 되기 때문이다).

실수 계수 삼차방정식(cubic)은 적어도 하나의 실근을 가지므로, 그것을 a라 하자. 두 연산을 반복해서 적용하면 다음이 모두 근이다.

$$a, \quad \frac{1}{a}, \quad 1 - a, \quad \frac{1}{1 - a}, \quad 1 - \frac{1}{a} = \frac{a - 1}{a}, \quad \frac{1}{(a - 1)/a} = \frac{a}{a - 1}.$$

(네 번째는 세 번째의 역수이고, 다섯 번째는 1 − (두 번째)이며, 여섯 번째는 다섯 번째의 역수이다.) 이들은 여섯 개의 실수이지만 삼차방정식의 서로 다른 근은 많아야 세 개이므로, 이 중 두 개는 같다.

? **생각해 보기** "이 중 두 개가 같다"는 사실이 어떻게 a를 결정하는가?

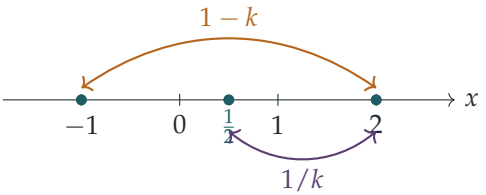
여섯 개의 사상을 $f_1, \ldots, f_6$이라 하고, f_1을 항등사상(identity)이라 하자. 각 사상은 목록 안에 역사상(inverse)을 가진다. $\frac{1}{k}, 1 - k, \frac{k}{k-1}$은 자기 자신이 역사상이고, $\frac{1}{1-k}$와 $\frac{k-1}{k}$는 서로의 역사상이다. 또한 임의의 두 사상을 합성하면 목록 안의 다른 사상이 된다는 것도 확인할 수 있다. 따라서 $i \neq j$에 대해 $f_i(a) = f_j(a)$이면, f_i^{-1}을 적용하여 $a = g(a)$를 얻는다. 여기서 $g = f_i^{-1} \circ f_j$는 여섯 사상 중 하나이며 항등사상이 아니다. 따라서 a는 항등사상이 아

닌 다섯 사상 중 하나의 고정점(fixed point)이다.

$$\frac{1}{a} = a \iff a = \pm 1, \qquad \frac{1}{1-a} = a \iff a^2 - a + 1 = 0,$$
$$1 - a = a \iff a = \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{a-1}{a} = a \iff a^2 - a + 1 = 0,$$
$$\frac{a}{a-1} = a \iff a(a-2) = 0.$$

이차식 $a^2 - a + 1$은 실근을 갖지 않으며(앞에서 본 이차식이다), $a \neq 0, 1$이다. 따라서 $a \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$이다.

a가 이 중 어느 것이든, 위의 여섯 값은 정확히 -1, 2, $\frac{1}{2}$를 지나간다. 사상 $1-k$는 -1과 2를 서로 바꾸고 $\frac{1}{2}$를 고정하며, $1/k$는 2와 $\frac{1}{2}$를 서로 바꾸고 -1을 고정한다.



따라서 -1, 2, $\frac{1}{2}$는 삼차방정식의 서로 다른 세 근이다. 최고차항의 계수가 1인 삼차식(monic cubic)은 세 근에 의해 결정되므로, 그 식은 다음과 같아야 한다.

$$(x+1)(x-2)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) = (x^2 - x - 2)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x + 1.$$

역으로, 이 삼차식의 근의 집합 $\{-1, \frac{1}{2}, 2\}$는 $k \mapsto 1/k$와 $k \mapsto 1-k$에 의해 자기 자신으로 보내지므로, 이 삼차식은 실제로 두 성질을 모두 가진다. 따라서

$$x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x + 1 = 0$$

이 그러한 유일한 삼차방정식이며, 이것으로 증명이 끝난다.

검산

$x = 2$를 대입하면 $8 - 6 - 3 + 1 = 0$이고, $x = -1$을 대입하면 $-1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 0$이다. 근의 곱은 $-1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = -1 = -r$이고, 근의 합은 $\frac{3}{2} = -p$이다. 삼차식의 계수가 부호를 제외하면 앞에서 읽으나 뒤에서 읽으나 같다는 점$(1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1)$에 주목하자. 이 회문(palindromic) 꼴이 바로 $k \mapsto 1/k$가 강제하는 것이다. 무작위로 고른 20,000개의 (b, c)에 대한 컴퓨터 검사로 역수 조건을 확인했고, $0, \pm 1, \frac{1}{2}, 2$에서 떨어진 무작위 실수 a는 언제나 서로 다른 여섯 개의 값을 주었다.

흔한 실수

- 첫 번째 부분에서 "$c = 1$"만 답하는 것. 각 근이 자기 자신의 역수인 경우에서 $b = 0$, $c = -1$이 추가된다.
- 두 사상에 대해 닫혀 있는 쌍 $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$를 놓치는 것. 이 쌍을 배제하는 것은 **실근**에서 출발한다는 점이다. 실수 계수 삼차방정식은 실근을 가지며, 그 근의 여섯 값에는 이 복소수들이 포함될 수 없다.
- 주어진 삼차방정식이 성립한다는 것만 증명하는 것. 문제는 그것이 **유일한** 삼차방정식임을 보이라고 요구한다.

STEP 너머

여섯 사상 $k \mapsto k$, $1/k$, $1-k$, $\frac{1}{1-k}$, $\frac{k-1}{k}$, $\frac{k}{k-1}$은 합성에 대해 군(group)을 이루며, 이는 대칭군(symmetric group) S_3와 같은 구조이다. 이 군은 세 점 $0, 1, \infty$를 치환하고, 여섯 값은 네 점의 가능한 비조화비(cross-ratio)들이다. 개수를 세는 단계는 궤도-안정자 정리(orbit–stabiliser theorem)이다. 궤도의 길이는 항등원이 아닌 어떤 원소에 의해 고정되는 점에서만 6보다 짧아진다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 집합에 작용하는 군을 전개하며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 사상들을 평면의 뫼비우스 변환(Möbius transformation)으로 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.