풀이

STEP II 1988, 문제 2

순수수학 • 대칭 대수방정식

> **STEP II 1988, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q2

핵심 아이디어

분모를 없앤 뒤 한 식에서 다른 식을 뺀다. 우변의 제곱의 차(difference of two squares)에서 인수 $y-z$가 나오는데, 이것은 좌변에 나타나는 $y-z$와 맞아떨어지며, 가정(hypothesis) $y \neq z$가 바로 이 인수를 약분할 수 있게 해 준다. 그다음에는 모든 것이 x, y, z에 대한 하나의 대칭(symmetric)식으로 귀결되고, 나머지는 대칭성이 해결해 준다.

풀이

$x+y+z=a$의 증명

$y \neq 0$이고 $z \neq 0$이므로 양변에 곱할 수 있다.

$$2ay - 3y^2 = (z-x)^2, \tag{1}$$
$$2az - 3z^2 = (x-y)^2. \tag{2}$$

(1)에서 (2)를 빼고 우변에 제곱의 차를 이용하면

$$\begin{aligned} 2a(y-z) - 3(y^2-z^2) &= (z-x)^2 - (x-y)^2 \\ &= [(z-x)-(x-y)][(z-x)+(x-y)] \\ &= (y+z-2x)(z-y). \end{aligned}$$

좌변은 $(y-z)[2a-3(y+z)]$이므로

$$(y-z)[2a-3(y+z)] = -(y-z)(y+z-2x).$$

? **생각해 보기** $y \neq z$가 정확히 어디에서 필요한가?

바로 여기다. $y - z \neq 0$이므로 이것으로 나눌 수 있고, 그러면

$$2a - 3y - 3z = 2x - y - z \quad \Longrightarrow \quad 2a = 2x + 2y + 2z,$$

따라서 요구한 대로 $x + y + z = a$이다.

세 번째 등식의 증명

$a = x + y + z$를 (1)에 다시 대입하면

$$y(2x + 2y + 2z - 3y) = (z - x)^2 \implies 2xy - y^2 + 2yz = z^2 - 2zx + x^2,$$

이고, 이를 정리하면

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0. \tag{3}$$

눈에 띄는 점은 (3)이 x, y, z에 대하여 **대칭**이라는 것이다. 이제 보이고자 하는 것을 살펴보자. $x \neq 0$이므로 등식 $2a - 3x = \dfrac{(y-z)^2}{x}$는

$$x(2a - 3x) = (y - z)^2,$$

와 동치이고, $a = x + y + z$를 쓰면 이것은

$$x(2y + 2z - x) = y^2 - 2yz + z^2 \iff x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0,$$

이 되어 정확히 (3)이다. 따라서

$$2a - 3x = \frac{(y-z)^2}{x}.$$

(사실 세 등식은 모두 (3)과 $a = x + y + z$를 함께 놓은 것을 각각 한 변수의 관점에서 쓴 것에 불과하다.)

$y = z$일 때도 마지막 등식이 성립할 수 있는가?

그렇다. $y = z$이면 주어진 두 등식은 같은 등식 $2a - 3y = \dfrac{(y-x)^2}{y}$가 되고, 마지막 등식은 $2a - 3x = 0$, 즉 $a = \frac{3}{2}x$가 된다. $a = \frac{3}{2}x$를 첫 번째 등식에 대입하면

$$3x - 3y = \frac{(x-y)^2}{y} \iff 3y(x - y) = (x - y)^2 \iff (x - y)(x - 4y) = 0.$$

따라서 예를 들어 $x = y = z = 1, a = \frac{3}{2}$는 세 등식을 모두 만족한다.

$$2a - 3y = 0 = \frac{(z-x)^2}{y}, \qquad 2a - 3z = 0 = \frac{(x-y)^2}{z}, \qquad 2a - 3x = 0 = \frac{(y-z)^2}{x}.$$

또 다른 예는 $x = 4, y = z = 1, a = 6$이다. 이때 처음 두 등식 각각에 대해 $2a - 3y = 9 = \frac{(1-4)^2}{1}$이고, $2a - 3x = 0 = \frac{0^2}{4}$이다.

그러므로 마지막 등식은 $y \neq z$일 때에만 성립하는 것이 **아니다**. 조건 $y \neq z$는 그 등식이 성립함을 보장하지만, $y = z$일 때에도 성립할 수 있다. $y = z$일 때 무너지는 것은 **보장**이다. 예를 들어 $x = 1, y = z = 2, a = \frac{13}{4}$은 주어진 두 등식을 만족하지만(각 변이 $\frac{1}{2}$이다), $2a - 3x = \frac{7}{2} \neq 0$이다. 또한 첫 번째 예에서는 $x + y + z = 3 \neq a$이므로, $y = z$이면 첫 번째 결론조차 성립하지 않을 수 있다는 점에도 주목하자.

검산

- (3)을 만족하는 $x = 9, y = 4, z = 1$을 택하자. $81 + 16 + 1 - 72 - 8 - 18 = 0$이다. 그러면 $a = 14$이고 $2a - 3y = 16 = \frac{(1-9)^2}{4}$, $2a - 3z = 25 = \frac{(9-4)^2}{1}$, $2a - 3x = 1 = \frac{(4-1)^2}{9}$이다. 세 등식이 모두 성립한다.
- 수치 검사를 통해 무작위로 고른 유리수(rational) 세 쌍 10,000개에서 항등식(identity) $(1) - (2) = (y - z)\big(2a - 2(x + y + z)\big)$가 정확히 성립함을 확인했고, $y \neq z$인 (3) 위의 무작위 점 약 1,900개와 위의 $y = z$인 세 예에서 세 등식이 모두 성립함을 확인했다.

흔한 실수

- 왜 허용되는지 밝히지 않고 $y - z$로 나누는 것. 그 단계가 바로 가정이 주어진 이유의 전부이다.
- 마지막 문항에 예 없이 "아니다" 또는 "그렇다"로만 답하는 것. $y = z$인 구체적인 세 쌍 하나면 결론이 난다.
- $y = z$이면 마지막 등식이 거짓이 된다고 생각하는 것. 단지 보장이 사라질 뿐이다.

STEP 너머

등식 (3)은 이차형식(quadratic form)이고, 그 영점 집합은 (x, y, z)-공간의 이중 원뿔(double cone)이다. $x, y, z > 0$이면 $x = p^2, y = q^2, z = r^2$으로 쓰자. 그러면 (3)은

$$-(p + q + r)(-p + q + r)(p - q + r)(p + q - r) = 0,$$

으로 인수분해(factorise)되는데, 좌변은 세 변의 길이가 p, q, r인 삼각형의 넓이의 제곱의 16배이다(헤론(Heron)의 공식). 따라서 (3)은 $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$가 퇴화 삼각형(degenerate triangle)을 이룬다는 뜻이며, 예를 들어 위의 검산에서는 $\sqrt{9} = \sqrt{4} + \sqrt{1}$이다. 이차형식과 그 분류는 대학 1학년 선형대수(linear algebra)의 표준적인 주제이다. Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.