풀이

STEP II 1988, 문제 14

역학 • 회전하는 강체

> **STEP II 1988, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q14

핵심 아이디어

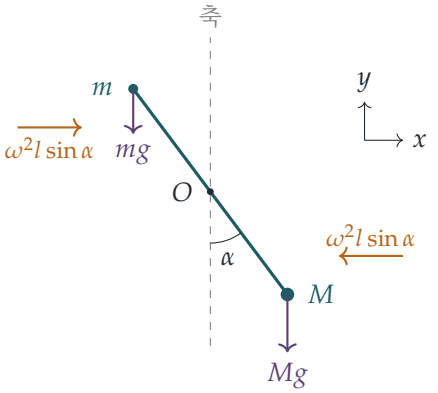
정상 상태(steady state)에서는 막대를 포함하며 회전하는 연직 평면에 대하여 아무것도 움직이지 않으므로, 각 입자는 단순히 수평인 원 위를 일정한 속력으로 돈다. 이것으로 각 입자의 가속도가 완전히 정해진다. 그러면 뉴턴(Newton)의 제2법칙으로부터 막대가 각 입자에 작용하는 힘을 알 수 있고, **가벼운** 막대(light rod)에 관한 두 가지 사실로 문제가 마무리된다. 막대에 작용하는 힘들은 평형을 이루어야 하고, (막대가 굴대(axle) 둘레로 자유롭게 흔들리므로) 굴대에 대한 힘들의 모멘트(moment)도 평형을 이루어야 한다.

풀이

모형. 질량들을 가볍고 강체인 막대 위의 입자로 보고, 막대는 O에서 매끄럽게 고정되어 굴대가 자기 방향에 대하여 짝힘(couple)을 작용하지 않는다고 하자. 막대를 포함하고 O를 지나는 연직선 둘레로 각속도(angular speed) ω로 도는 연직 평면에서 생각한다. 이 평면에서 x를 수평 방향, y를 연직 위 방향으로 잡고 원점을 O로 한다.

M이 $(l\sin\alpha,\ -l\cos\alpha)$에, m이 $(-l\sin\alpha,\ l\cos\alpha)$에 있다고 하자. 무거운 입자가 아래쪽에 있어야 한다는 것은 곧 보게 된다. 각 입자는 연직축 둘레로 반지름 $l\sin\alpha$인 수평인 원 위를 일정한 속력으로 움직이므로, 가속도는 축을 향하는 수평 방향으로 크기가 $\omega^2 l\sin\alpha$이다.

$$\mathbf{a}_M = (-\omega^2 l\sin\alpha,\ 0), \qquad \mathbf{a}_m = (\omega^2 l\sin\alpha,\ 0).$$



(호박색 화살표는 가속도, 자주색 화살표는 무게이다.)

막대가 작용하는 힘. 막대가 M과 m에 작용하는 힘을 각각 $\mathbf{R}_M$, $\mathbf{R}_m$이라 하자. 이 힘들이 막대 방향일 필요는 없다. 강체 막대는 옆으로도 밀 수 있기 때문이다. 뉴턴의 제2법칙에서 $\mathbf{R}_M - Mg\,\mathbf{j} = M\mathbf{a}_M$이므로

$$\mathbf{R}_M = \left(-M\omega^2 l \sin\alpha,\ Mg\right), \qquad \mathbf{R}_m = \left(m\omega^2 l \sin\alpha,\ mg\right).$$

뉴턴의 제3법칙에 따라 입자들은 막대의 M 쪽 끝을 $-\mathbf{R}_M$으로, m 쪽 끝을 $-\mathbf{R}_m$으로 민다.

? **생각해 보기** 굴대는 O에서 막대에 알 수 없는 힘을 작용한다. 이 힘을 모르면서 어떻게 모멘트를 계산할 수 있을까?

굴대에 대한 모멘트. 굴대의 힘은 O에 작용하므로 O에 대한 모멘트가 없다. 또 막대는 자유롭게 흔들리므로 굴대는 자기 방향(우리 평면에 수직이고 O를 지나는 직선)에 대하여 짝힘을 작용하지 않는다. 가벼운 막대는 그 자체의 각운동량(angular momentum)이 없으므로, 이 직선에 대한 두 끝점의 힘의 모멘트는 서로 상쇄되어야 한다. (x, y)에 작용하는 힘 (F_x, F_y)의 모멘트는 (반시계 방향으로) $xF_y - yF_x$이다. $(l\sin\alpha, -l\cos\alpha)$에 작용하는 $-\mathbf{R}_M$에 대하여

$$l\sin\alpha\,(-Mg) - (-l\cos\alpha)(M\omega^2 l\sin\alpha) = -Mgl\sin\alpha + M\omega^2 l^2 \sin\alpha\cos\alpha,$$

이고, $(-l\sin\alpha,\ l\cos\alpha)$에 작용하는 $-\mathbf{R}_m$에 대하여

$$(-l\sin\alpha)(-mg) - l\cos\alpha\,(-m\omega^2 l\sin\alpha) = mgl\sin\alpha + m\omega^2 l^2 \sin\alpha\cos\alpha.$$

이다. 합을 0으로 놓고 ($\alpha > 0$이므로) $l\sin\alpha \neq 0$으로 나누면

$$(M+m)\,\omega^2 l\cos\alpha = (M-m)\,g \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)\frac{g}{l\cos\alpha},$$

이다. 여기서 $\cos\alpha > 0$으로 나누었으며, 이것이 구하려던 결과이다.

만약 M이 **위쪽** 입자라면, 같은 계산(M과 m을 바꿈)에서 $(M+m)\omega^2 l\cos\alpha = (m-M)g < 0$을 얻는데, 이는 불가능하다. 따라서 가정한 대로 무거운 입자는 실제로 O 아래에 있다.

굴대에 작용하는 반작용. 막대는 가벼우므로 막대에 작용하는 힘의 합은 0이다. 굴대는 막대를 $\mathbf{R}_M + \mathbf{R}_m$으로 밀고, 따라서 막대는 굴대를

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{R}_M + \mathbf{R}_m) = \Big((M-m)\,\omega^2 l\sin\alpha,\ -(M+m)\,g\Big).$$

으로 민다. 이 힘은 아래쪽을 향하고, 수평 성분은 M 쪽 바깥을 향한다. 이 힘이 연직 아래 방향과 이루는 각을 ϕ라 하면, ω^2의 값을 이용하여

$$\begin{aligned}\tan\phi &= \frac{(M-m)\,\omega^2 l\sin\alpha}{(M+m)\,g} = \frac{M-m}{M+m}\cdot\frac{l\sin\alpha}{g}\cdot\frac{M-m}{M+m}\cdot\frac{g}{l\cos\alpha}\\ &= \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\tan\alpha.\end{aligned}$$

이다. $0 \le \phi < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\phi = \tan^{-1}\left[\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\tan\alpha\right]$이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $m = 0$이면 이 계는 길이 l인 원뿔 진자(conical pendulum)이고, 공식은 익숙한 $\omega^2 = g/(l\cos\alpha)$를 준다. 이때 반작용의 각은 α이다. 막대가 줄처럼 자기 방향으로 당기기 때문이다.
- $M = m$이면 막대는 O에서 균형을 이루므로 $\omega = 0$이고 반작용은 크기 $2Mg$인 연직 방향 힘이다. 두 공식 모두 이와 일치한다.
- 수치적으로 $M = 3$, $m = 1$, $l = 0.7$, $\alpha = 0.6$, $g = 9.8$로 두면 $\omega^2 \approx 8.48$이고 반작용의 각은 약 9.71°이다. 막대의 각에 대한 운동 방정식(equation of motion)을 α에서 정지한 상태로부터 단계별로 계산하면 각이 α에 그대로 머물고, 입자들의 3차원 위치로부터 가속도를 계산하면 같은 각이 다시 나온다.

흔한 실수

- 막대가 입자에 작용하는 힘이 막대 방향이라고 가정하는 것. 그렇지 않다. 강체 막대는 옆 방향의 힘도 전달하며, 바로 그 때문에 모멘트를 계산하는 것이다.
- m의 가속도도 축을 향하므로 M의 가속도와 **반대** 방향이라는 점을 잊는 것. 반작용의 수평 성분은 부분적으로 상쇄되어 $M+m$이 아니라 $M-m$이 된다.

- 무거운 입자를 위에 두는 것. 토크(torque) 방정식은 이런 일이 일어날 수 없음을 보여 준다.

STEP 너머

O에 대한 막대의 각운동량은 연직인 회전축과 평행하지 않으므로, 계가 회전함에 따라 그 방향이 바뀐다. 각운동량을 바꾸려면 짝힘이 필요하며, 굴대가 우리가 사용한 방향에 수직인 방향으로 이 짝힘을 제공한다. 이것이 관성 텐서(inertia tensor)를 사용하는 강체 동역학(rigid-body dynamics)의 출발점이며, 균형이 잘 맞지 않는 바퀴가 베어링 위에서 흔들리는 이유를 설명해 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 이 내용을 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.