풀이

STEP II 1988, 문제 13

역학 • 마찰과 평형

STEP II 1988, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

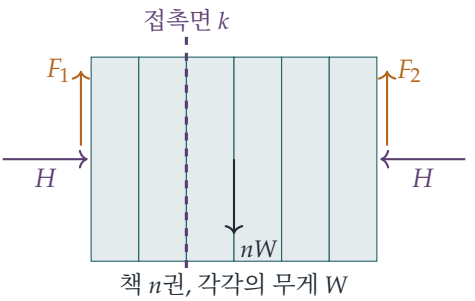
step.maths.org/questions/88-s2-q13

핵심 아이디어

책을 떠받치는 연직 방향의 힘은 모두 마찰력(friction)이고, 각 접촉면에서 마찰력은 그곳의 수직항력(normal reaction)의 μ배를 넘을 수 없다. 따라서 두 가지가 필요하다. 하나는 모든 접촉면에서의 수직항력이고(수평 방향 평형을 쓰면 쉽게 구할 수 있다), 다른 하나는 각 접촉면이 내야 하는 마찰력이다(적절한 책 **묶음**의 연직 방향 평형을 쓴다). 그런 다음 어느 접촉면이 가장 미끄러지기 쉬운지 찾는다. 이웃한 책 몇 권을 하나의 물체로 다루면 계산이 짧아진다.

풀이

모형. 무게가 각각 W인 똑같은 책 n권이 표지를 연직으로 세운 채 놓여 있다고 하자. 두 손은 각각 $H \le Q$인 힘으로 수평으로 누르고, 위쪽으로 마찰력을 낸다. 이 마찰력을 F_1(왼손), F_2(오른손)라 하자. 각 손이 내는 연직 방향의 힘은 정확히 이 마찰력이므로 $F_1, F_2 \le P$이어야 한다. 문제에서 회전 효과는 무시하라고 했으므로, 각 책이나 책 묶음에 대해 힘의 평형만 생각하면 된다.



수직항력. 책에 왼쪽부터 차례로 $1, 2, \ldots, n$의 번호를 붙이고, 책 k와 책 $k+1$ 사이의 접촉면을 접촉면 k라 하자($1 \le k \le n-1$). 책 $1, \ldots, k$로 이루어진 묶음에 작용하는 수평 방향의 힘은 왼손이 누르는 힘 H와 책 $k+1$이 주는 수직항력뿐이다. 따라서 그 수직항력도 H이다. 즉 손과의 접촉이든 책끼리의 접촉이든 **모든** 접촉면에서 수직항력은 H이고, 따라서 모든 접촉면이 낼 수 있는 마찰력의 크기는 최대 μH이다.

두 손. 책 전체에 대해 연직 방향으로

$$F_1 + F_2 = nW.$$

F_1, F_2는 각각 P 이하이고(팔 힘), $\mu H \le \mu Q$ 이하이다(마찰). $L = \min(P, \mu Q)$라 하자. 그러면 $nW = F_1 + F_2 \le 2L$이므로

$$n \le \frac{2L}{W} = \frac{2\min(P, \mu Q)}{W}.$$

이것은 필요조건이다. 이 조건이 성립하면, 가장 좋은 방법은 최대한 세게 누르고($H = Q$; H가 커지면 모든 마찰력의 한계가 올라가기만 한다) 하중을 똑같이 나누는 것이다. 즉 $F_1 = F_2 = \frac{1}{2}nW \le L$로 둔다. 그러면 두 손 모두 한계 안에 있다.

> **생각해 보기** 두 손이 버티고 있더라도, 가운데 어딘가에서 책끼리 미끄러질 수는 없을까?

책 사이의 접촉면. 이것을 직접 확인한다. 책 $1, \ldots, k$로 이루어진 묶음에 연직 방향 평형을 적용하자. 이 묶음의 무게 kW는 손이 주는 $F_1 = \frac{1}{2}nW$와 책 $k+1$이 주는 마찰력 f_k(위쪽을 양의 방향으로 한다)가 떠받친다.

$$f_k = kW - \tfrac{1}{2}nW = \left(k - \tfrac{n}{2}\right) W.$$

$1 \le k \le n-1$이면 $\left|k - \frac{n}{2}\right| \le \frac{n}{2} - 1$이고, 등호는 $k = 1$과 $k = n-1$, 즉 바깥쪽 책 바로 옆의 접촉면에서 성립한다. 따라서 어떤 접촉면에 필요한 마찰력도 최대 $\left(\frac{n}{2} - 1\right)W$이고, 이는 각 손이 내는 $\frac{1}{2}nW$보다 W만큼 작다. 모든 접촉면의 한계는 손과 같은 μQ이므로, 손이 미끄러지지 않으면 어떤 두 책 사이도 미끄러지지 않는다. (물리적으로 보면, 바깥쪽 책은 각각 손이 붙잡고 있고, 그 책이 안쪽으로 전달하는 마찰력은 손의 마찰력에서 자기 무게를 뺀 것이다.)

답. 책 한 줄을 들어 올릴 수 있을 필요충분조건은 $nW \le 2\min(P, \mu Q)$이다. 따라서 책의 최대 권수는

$$\boxed{n_{\max} = \left\lfloor \frac{2\min(P,\, \mu Q)}{W} \right\rfloor}$$

이다. 즉 $2P/W$와 $2\mu Q/W$를 모두 넘지 않는 가장 큰 정수이다. 어느 한계가 적용되는지를 보면 사서를 제약하는 것이 무엇인지 알 수 있다. $P < \mu Q$이면 들어 올리는 팔 힘이, $\mu Q < P$이면 쥐는 힘이 한계이다.

검산

- $W = 10\,\mathrm{N}$, $P = 60\,\mathrm{N}$, $Q = 100\,\mathrm{N}$, $\mu = 0.4$로 두자. 그러면 $\min(60, 40) = 40$이고 $n_{\max} = 8$이다. 책이 8권이면 각 손은 $40\,\mathrm{N}$의 마찰력을 내는데, 이는 정확히 그 한계이고, 가장 불리한 접촉면에 필요한 마찰력은 $30\,\mathrm{N} < 40\,\mathrm{N}$이다. 아홉 번째 책을 더하면 각 손이 $45\,\mathrm{N}$을 내야 한다.
- 책이 한 권($n = 1$)이면 접촉면이 없고, $W \le 2\min(P, \mu Q)$이기만 하면 되므로 분명히 맞다.
- 컴퓨터로 W, P, Q, μ를 무작위로 3000번 골라 전체 부등식(inequality) 계(임의의 $H \le Q$, F_1, F_2의 임의의 분배, 모든 접촉면)를 풀어 보았더니, 가능한 가장 큰 n이 언제나 공식과 일치했다.

흔한 실수

- 팔이 내는 연직 방향의 힘이 곧 마찰력**이라는** 점, 따라서 두 한계 P와 μQ가 같은 힘에 적용된다는 점을 잊는다.
- 확인하지 않고 가운데 책이 가장 약한 지점이라고 가정한다. 책 사이의 힘은 손에서의 힘보다 크지 않고 오히려 작다.
- 바닥 함수 없이 $2\min(P, \mu Q)/W$로 답한다. 답은 책의 권수이므로 정수여야 한다.

STEP 너머

여기서 마찰력은 **부정정**(statically indeterminate)이다. 평형 조건으로 정해지는 것은 $F_1 + F_2$뿐이고, 우리는 모든 접촉면을 한계 안에 두는 분배가 **존재하는지**를 물었다. 이런 문제는 작은 선형계획법(linear programming) 문제이고, 허용 가능한 평형이 존재하는지 확인한다는 같은 아이디어가 구조물의 극한 해석(limit analysis)의 바탕을 이룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰과 평형을 꼼꼼하게 다루는 모습을 볼 수 있는 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.