풀이

STEP II 1988, 문제 12

역학 • 떨어지는 사슬

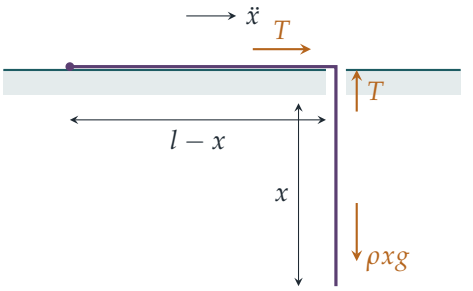
> **STEP II 1988, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q12

핵심 아이디어

줄은 늘어나지 않으므로(inextensible) 줄의 모든 부분이 같은 속력으로 움직인다. 따라서 줄 전체는 하나의 물체처럼 행동하며, 이 물체를 움직이는 힘은 탁자 아래로 매달린 부분의 무게이다. 구멍을 통과하는 줄이 많아질수록 이 무게가 커지므로, 매달린 길이에 대한 간단한 선형 미분방정식(linear differential equation)을 얻는다. 그 해는 쌍곡코사인(hyperbolic cosine)이며, 구하려는 시간은 이 함수의 역함수를 취하여 얻는다.

풀이

마찰(friction)은 어디에도 없다. 탁자는 매끄럽고, 구멍은 작고 매끄러우며(따라서 구멍은 줄의 방향만 바꿀 뿐 줄을 따라 어떤 힘도 가하지 않는다), 줄의 단위 길이당 질량은 ρ이다. 시각 t에서 탁자 아래로 매달린 길이를 x라 하면, 탁자 위에 놓인 길이는 $l - x$이다. 처음에 $x = l - d$이고 $\dot{x} = 0$이며, 줄의 끝이 구멍 꼭대기에 닿는 것은 $x = l$일 때이다. 탁자의 높이가 l보다 크므로, 그때까지 매달린 부분이 바닥에 닿는 일은 없다.



구멍에서 줄의 장력(tension)을 T라 하자. 구멍이 매끄러우므로 구멍 바로 위와 바로 아래

에서 장력은 같은 값 T를 가진다.

탁자 위의 부분. 이 부분의 질량은 $\rho(l-x)$이고, 가속도 $\ddot{x}$로 구멍을 향해 수평으로 움직인다(줄이 늘어나지 않으므로 매달린 부분과 같은 빠르기로 움직인다). 탁자가 매끄러우므로 이 부분에 작용하는 수평 방향의 힘은 장력 T뿐이다. 따라서

$$\rho(l-x)\,\ddot{x} = T.$$

매달린 부분. 이 부분의 질량은 ρx이고, 아래 방향의 무게 $\rho x g$와 위 방향의 장력 T를 받아 아래쪽으로 가속도 $\ddot{x}$로 움직인다.

$$\rho x\,\ddot{x} = \rho x g - T.$$

두 식을 더하면 T가 소거된다.

$$\rho l\,\ddot{x} = \rho g x, \qquad \text{즉} \qquad \ddot{x} = n^2 x, \quad n = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

생각해 보기 구멍 양쪽에 있는 줄의 양은 계속 변한다. 각 부분에 $F = ma$를 써도 정말 괜찮을까?

괜찮다. 각 식은 한 순간에, 그 순간 구멍의 각 쪽에 있는 특정한 줄 조각에 적용된 것이다. 줄은 하나의 속력 $\dot{x}$로 전체가 함께 움직이므로 줄 전체의 운동량(momentum)의 변화율은 $\rho l\ddot{x}$이고, 운동 방향의 성분을 가지는 외력은 매달린 부분의 무게 $\rho x g$뿐이다. (탁자의 수직 항력은 수평 부분의 무게와 평형을 이루고, 구멍은 줄의 방향을 바꿀 뿐이다.) 따라서 합친 식 $\rho l\ddot{x} = \rho g x$는 줄 전체에 대한 뉴턴(Newton)의 제2법칙에 지나지 않는다. 아래의 에너지 검산이 이를 확인해 준다.

$\ddot{x} = n^2 x$의 일반해는 $x = A\cosh nt + B\sinh nt$이다. $t = 0$에서 $\dot{x} = 0$이므로 $B = 0$이고, $t = 0$에서 $x = l - d$이므로 $A = l - d$이다.

$$x = (l-d)\cosh nt.$$

줄의 끝은 $x = l$일 때 구멍 꼭대기에 닿으므로, 그 시각 t_1은 다음을 만족한다.

$$\cosh nt_1 = \frac{l}{l-d}.$$

$l/(l-d) > 1$이므로 이 식의 양의 해는 정확히 하나이다. $\operatorname{arcosh} u = \ln(u + \sqrt{u^2-1})$를 이용하면

$$\sqrt{u^2-1} = \frac{\sqrt{l^2-(l-d)^2}}{l-d} = \frac{\sqrt{2ld-d^2}}{l-d},$$

이므로 걸리는 시간은 다음과 같다.

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\operatorname{arcosh}\!\left(\frac{l}{l-d}\right) = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\ln\!\left(\frac{l+\sqrt{2ld-d^2}}{l-d}\right).}$$

검산

- **에너지.** 탁자 윗면을 위치에너지(potential energy)의 기준으로 잡자. 매달린 부분의 질량중심(centre of mass)은 깊이 $x/2$에 있으므로 위치에너지는 $-\frac{1}{2}\rho g x^2$이다. 정지 상태에서 시작하는 에너지 보존(conservation of energy)에 의해 $\frac{1}{2}\rho l\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\rho g\left(x^2 - (l-d)^2\right)$이고, 이를 t에 대해 미분하면 다시 $l\ddot{x} = gx$를 얻는다.
- **작은 d.** d가 아주 작으면 줄의 거의 전부가 매달려 있으므로, 줄은 g에 가까운 가속도로 떨어져 약 $\sqrt{2d/g}$의 시간이 걸려야 한다. 실제로 d가 작을 때 $\cosh nt_1 = 1 + \frac{d}{l} + \cdots$와 $\cosh nt_1 \approx 1 + \frac{1}{2}n^2t_1^2$로부터 $t_1^2 \approx 2d/(n^2l) = 2d/g$를 얻는다.
- **$d \to l$.** 매달린 부분이 거의 없으면 줄은 거의 움직이기 시작하지 못하며, 로그 식에서 알 수 있듯이 $t_1 \to \infty$이다.
- **수치 확인.** $l = 2\,\mathrm{m}$, $d = 1.5\,\mathrm{m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$일 때 공식은 $t_1 \approx 0.932\,\mathrm{s}$를 주며, 이는 운동을 단계별로 수치 적분한 결과와 일치한다.

흔한 실수

- 매달린 부분만 놓고 $\rho x\ddot{x} = \rho xg$라고 쓰면서, 이 부분이 탁자 위의 줄을 끌어당겨야 한다는 사실을 잊는 것(같은 말로, 질량을 잘못 쓰는 것: 가속되는 질량은 줄 전체의 질량 ρl이다).
- $x = A\cos nt$ 꼴의 해를 시도하는 것: 방정식은 $\ddot{x} = +n^2x$이므로 운동은 진동하지 않고 지수적으로 커진다.
- 끝나는 조건으로 $x = l$ 대신 $x = d$를 놓는 것: 줄의 끝이 구멍에 닿는 것은 전체 길이 l이 매달렸을 때이다.

STEP 너머

이것은 질량 분포가 변하는 문제이다. 질량 자체는 일정하지만 중력을 받는 부분이 위치에 따라 변하며, 그 결과 해가 지수함수인 선형 방정식이 나온다. 만약 줄이 마찰 없는 탁자 모서리에서 떨어지면서 정지해 있던 줄 더미를 끌어올린다면, 비탄성(inelastic) "충격"으로 운동량이 손실되고 에너지는 보존되지 않는다. 이러한 경우들을 구별하는 것은 대학 역학의 고전적인 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량이 움직이는 계와 사슬 및 밧줄을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.