풀이

STEP II 1988, 문제 11

역학 • 기둥에 감기는 줄

> **STEP II 1988, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q11

핵심 아이디어

줄의 자유로운 부분은 언제나 기둥에서 **접선**(*tangent*)을 따라 뻗어 나간다. 따라서 입자의 위치는 "접점 더하기 길이가 (풀린 줄의 길이)인 접선 벡터"이고, 이것은 각 θ로 쉽게 나타낼 수 있다. 이를 미분하면 두 항이 상쇄되어, 속도가 줄에 수직임을 알 수 있다. 따라서 장력(tension)은 일을 하지 않고, 속력은 처음 값을 그대로 유지하며, 속력 공식은 θ에 대한 변수분리형 미분방정식(separable differential equation)이 된다.

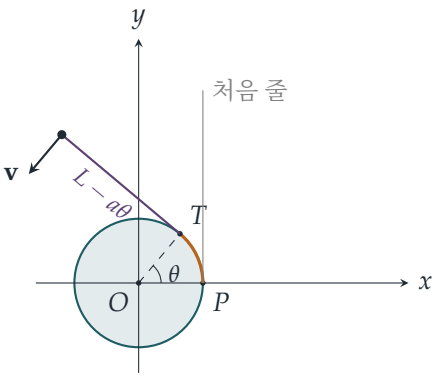
풀이

설정하기

입자를 매끄러운 탁자 위의 질점으로 모형화하고, 줄은 가볍고 늘어나지 않으며 팽팽한 상태를 유지한다고 하자. 중력과 수직항력은 연직 방향이고 서로 상쇄되므로, 수평 방향의 힘은 장력뿐이다.

원점이 O인 좌표축을 잡고 P를 $(a, 0)$에 놓는다. 줄은 처음에 OP에 수직이므로 P에서 기둥에 접하고, 입자는 (a, L)에서 출발한다고 하자. (대칭인 반대쪽을 택하면 y좌표의 부호만 바뀐다.) 줄이 시계 반대 방향으로 감기면서 각 θ만큼 감기고 나면, 길이 $a\theta$가 P에서부터 호를 따라 놓이고, 줄은 다음 점에서 기둥을 떠난다.

$$T = a(\cos\theta,\ \sin\theta).$$



길이가 $L - a\theta$인 줄의 자유로운 부분은 T에서의 접선을 따라 놓인다. 줄이 풀리는 쪽을 가리키는 단위 접선벡터는 $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$이다. 이 벡터는 OT에 수직이고, $\theta = 0$일 때 $(0,1)$이므로 출발 위치와 맞아떨어진다.

위치와 속도

따라서 입자의 위치벡터(position vector)는 다음과 같다.

$$\mathbf{r} = a\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + (L-a\theta)\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\cos\theta - (L-a\theta)\sin\theta\\ a\sin\theta + (L-a\theta)\cos\theta\end{pmatrix}.$$

연쇄 법칙(chain rule)과 곱의 미분법(product rule)을 써서 t에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= a\dot\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} - a\dot\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} + (L-a\theta)\dot\theta\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\\ &= -(L-a\theta)\dot\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

처음 두 항은 상쇄된다. 접점이 기둥을 따라 움직이는 효과가 자유로운 줄이 짧아지는 효과에 의해 정확히 상쇄되는 것이다.

$(\cos\theta, \sin\theta)$는 단위벡터이고, $L - a\theta > 0$이며, 줄이 감기는 동안 $\dot\theta > 0$이므로 속력은

$$|\dot{\mathbf{r}}| = (L-a\theta)\dot\theta,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

기둥에 닿을 때까지 걸리는 시간

? **생각해 보기** 줄이 입자를 당기고 있는데, 왜 속력이 v로 유지되어야 할까?

속도는 $(\cos\theta, \sin\theta)$에 평행하고, 줄은, 따라서 장력은 $(-\sin\theta, \cos\theta)$ 방향으로 놓인다. 두 방향은 수직이므로 장력은 일을 하지 않는다. 탁자가 매끄러우므로 수평 방향의 힘은 장력뿐이다. 따라서 운동 에너지와 함께 속력도 v로 일정하게 유지된다. 장력은 속도의 방향만 바꿀 뿐이다.

그러므로 입자가 기둥에 닿을 때까지 모든 t에 대하여

$$(L - a\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v, \qquad \theta(0) = 0.$$

변수를 분리하여 0부터 t까지 적분하면

$$L\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2 = vt.$$

입자는 줄 전체가 감겼을 때, 즉 $a\theta = L$일 때 기둥에 닿으므로 $\theta = L/a$이다. 이때

$$vt = \frac{L^2}{a} - \frac{L^2}{2a} = \frac{L^2}{2a}, \qquad \text{따라서} \qquad t = \frac{L^2}{2av},$$

이고, 이것이 구하려던 시간이다.

검산

- $\theta = 0$일 때 공식은 $\mathbf{r} = (a, L)$과 $\dot{\mathbf{r}} = (-L\dot{\theta}, 0)$을 주는데, 이는 마땅히 그래야 하듯 처음 줄에 수직이다.
- 단위: $L^2/(av)$의 단위는 $\mathrm{m}^2/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{m\,s^{-1}}) = \mathrm{s}$이다.
- 답을 보는 또 다른 방법: 입자가 지나는 경로 전체의 길이는

  $$\int_0^{L/a} (L - a\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{L^2}{2a},$$

  이고, 이를 일정한 속력 v로 이동한다.
- $a = 1$, $L = 3$, $v = 2$인 기둥에 매우 뻣뻣한 줄이 감기는 상황으로 운동을 수치 시뮬레이션해 보았다. 시뮬레이션한 시간은 $L\theta - \frac{1}{2}a\theta^2 = vt$와 10^{-5} 이내로 일치했고, $\dot{\theta} = v/(L - a\theta)$를 $a\theta = L$까지 적분하면 2.25가 나왔는데, 이는 $L^2/(2av)$와 같다.

흔한 실수

- O에 대한 각운동량 보존(conservation of angular momentum)을 쓰는 것. 장력은 O를 지나지 않으므로(접선을 따라 작용하므로) O에 대한 각운동량은 보존되지 **않는다**. 알맞은 도구는 에너지이다.
- 자유로운 줄을 접선 방향이 아니라 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 방향, 즉 지름 방향으로 쓰는 것.
- 속력 공식에 $\dot{\theta} > 0$이 필요하다는 것을 잊는 것. 벡터의 크기는 $(L - a\theta)|\dot{\theta}|$이다.

STEP 너머

입자가 그리는 경로는 원의 **신개선**(*involute*)으로, 실패에서 풀려 나가는 팽팽한 실의 끝이 그리는 곡선이다. 톱니바퀴의 톱니가 지금과 같은 모양인 이유가 바로 신개선이며, 신개선은 하위헌스(Huygens)의 진자시계 연구에서도 핵심적인 역할을 했다. 그 호의 길이 $\int (L - a\theta)\, \mathrm{d}\theta$는 평면 곡선의 미분기하학(differential geometry; 축폐선, 신개선, 곡률)의 첫 예이다. 에너지와 각운동량이 언제 보존되고 언제 보존되지 않는지를 포함한 역학 쪽 이야기는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.