풀이

STEP II 1988, 문제 10

순수수학 • 포물면의 벡터 기하

> **STEP II 1988, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q10

핵심 아이디어

이 방정식은 기하학적 의미가 분명한 두 부분으로 이루어져 있다. r는 O로부터의 거리이고, $(a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r})/a$는 평면 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = a^2$로부터의 부호 있는 거리(signed distance)이다. 따라서 S는 O를 초점(focus)으로, 그 평면을 준선(directrix)으로 하는 회전포물면(paraboloid of revolution)이다. 나머지는 O를 지나는 직선을 따라 계산하면 된다. 직선 OP 위의 점을 $\lambda\mathbf{p}$로 쓰고, O를 지나며 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{p}$에 수직인 직선 위의 점을 $\mu\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$로 쓴다. 그런 다음 이를 S의 방정식에 대입한다. $|\lambda\mathbf{p}| = |\lambda|p$이므로 λ의 부호가 중요하다.

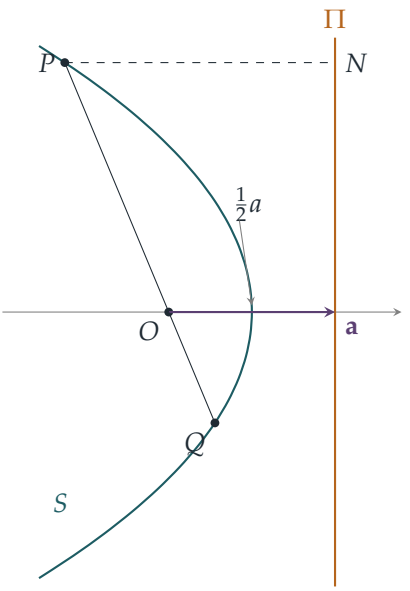
풀이

자취

Π를 평면 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = a^2$라 하자. 이 평면의 단위 법선벡터(unit normal)는 $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/a$이고, 이 평면은 O로부터 $\mathbf{a}$ 쪽으로 거리 a만큼 떨어져 있다. 점 $\mathbf{r}$에서 Π까지의 수직 거리는

$$d(\mathbf{r}) = |\,a - \hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r}\,| = \frac{|a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}|}{a}.$$

이다.



그림은 $\mathbf{a}$를 포함하는 평면으로 자른 S의 단면을 보여 준다. 점 P는 O와, Π 위로 내린 수선의 발 N으로부터 같은 거리에 있다. 이 곡면은 O와 Π의 한가운데인 $\frac{1}{2}\mathbf{a}$에서 축과 만난다.

S 위의 점은 두 거리가 같다. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + ar = a^2$이면 $a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = ar \geq 0$이다. 따라서

$$d(\mathbf{r}) = \frac{a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{a} = \frac{ar}{a} = r = |OR|.$$

이다.

두 거리가 같은 점은 S 위에 있다. $r = d(\mathbf{r})$, 즉 $ar = |a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}|$라고 하자. $a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r} \geq 0$이면 이것은 바로 S의 방정식이다. 그렇지 않으면 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} > a^2$이고, 조건은 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = ar + a^2 > ar$를 뜻한다. 이는 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} \leq ar$(코시–슈바르츠(Cauchy–Schwarz) 부등식)에 모순이다. 따라서 Π 너머에 있는 점 중에는 두 거리가 같은 점이 없고, S는 정확히 O와 Π로부터 같은 거리에 있는 점들의 집합이다. 이것은 O를 지나고 $\mathbf{a}$ 방향인 직선을 축으로 하는 회전포물면이다.

나중에 유용하게 쓰일 두 가지 결과가 있다. S 위의 점 P에 대하여

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} = a^2 - ap. \qquad (*)$$

이다. 또한 $a^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + ap \leq 2ap$이므로 $p \geq \frac{1}{2}a$이고, 따라서 $2p - a \geq 0$이다. 등호는 $\mathbf{p}$가 $\mathbf{a}$의 양수배일 때, 즉 P가 꼭짓점(vertex) $\frac{1}{2}\mathbf{a}$일 때만 성립한다.

두 번째 교점 Q

직선 OP 위의 점은 $\lambda\mathbf{p}$이고, $|\lambda\mathbf{p}| = |\lambda|p$이다. 이를 S의 방정식에 대입하면

$$\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + a|\lambda|p = a^2.$$

이다.

생각해 보기 왜 Q는 O에 대하여 P와 같은 쪽에 있을 수 없을까?

$\lambda > 0$이면 좌변은 $\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + ap) = \lambda a^2$이므로 $\lambda = 1$이고, 이는 P 자신이다. (기하학적으로, 초점에서 나가는 반직선은 포물면과 많아야 한 번 만난다.) 따라서 Q에서는 $\lambda < 0$이고, 이 때 $|\lambda| = -\lambda$이다. $(*)$를 이용하면

$$\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} - ap) = a^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda(a^2 - 2ap) = a^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = -\frac{a}{2p-a}.$$

이다. $2p > a$이면, 즉 P가 꼭짓점이 아니면, 이 값은 요구한 대로 음수이다. (꼭짓점에서는 직선 OP가 축이 되고, 이 직선은 S와 한 번만 만난다.) 그러므로

$$\boxed{\mathbf{q} = -\frac{a}{2p-a}\,\mathbf{p}} \qquad \text{그리고} \qquad |OQ| = \frac{ap}{2p-a}.$$

이다.

점 T와 T'

O를 지나며 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{p}$에 모두 수직인 직선은 $\mathbf{t} = \mu\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$이다. ($\mathbf{a}\times\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$이어야 하므로 P는 축 위에 있지 않다.) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{t} = 0$이므로 S의 방정식은 $at = a^2$, 즉 $|\mathbf{t}| = a$가 된다. 따라서 T와 T'은 O를 지나고 Π에 평행한 평면이 S와 만나서 생기는 원 위에 있고,

$$|\mu|\,|\mathbf{a}\times\mathbf{p}| = a.$$

이다.

생각해 보기 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{p}$ 사이의 각을 모르면서 $|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|$를 어떻게 구할 수 있을까?

항등식 $|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|^2 = a^2p^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})^2$을 이용한다. 이것은 모양을 바꾼 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$이다. 여기에 $(*)$를 대입하면

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|^2 &= a^2p^2 - (a^2 - ap)^2\\ &= a^2p^2 - a^4 + 2a^3p - a^2p^2\\ &= a^3(2p-a).\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$|\mu| = \frac{a}{a^{3/2}\sqrt{2p-a}} = \frac{1}{\sqrt{a(2p-a)}} = \frac{1}{\sqrt{2ap-a^2}},$$

이고, T와 T'의 위치벡터(position vector)는 요구한 대로 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2ap-a^2}}\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$이다.

삼각형 PQT의 넓이

점 P, O, Q는 한 직선 위에 있고, O는 P와 Q 사이에 있다. 벡터 $\mathbf{t}$는 $\mathbf{a} \times \mathbf{p}$에 평행하므로 $\mathbf{p}$에 수직이고, 따라서 직선 PQ에 수직이다. 그러므로 OT는 삼각형 PQT에서 T로부터 내린 높이(altitude)이고, 그 길이는 a이다. 밑변은

$$|PQ| = p + \frac{ap}{2p-a} = \frac{p(2p-a)+ap}{2p-a} = \frac{2p^2}{2p-a}.$$

이다. 그러므로

$$\text{넓이} = \tfrac{1}{2} \cdot |PQ| \cdot |OT| = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2p^2}{2p-a} \cdot a = \frac{ap^2}{2p-a},$$

로 요구한 결과를 얻는다. T 대신 T'을 써도 같은 결과가 성립한다.

검산

- $\mathbf{a} = (2,0,0)$과 그림의 점인 $P = (-1.25,3,0)$을 잡자. 그러면 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + ap = -2.5 + 2(3.25) = 4 = a^2$이므로 P는 S 위에 있다. 공식에 따르면 $\mathbf{q} = -\frac{2}{4.5}\mathbf{p} = (0.556, -1.333, 0)$이고, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{q} + aq = 1.111 + 2.889 = 4$이므로 Q도 S 위에 있다.
- P를 통경(latus rectum)의 한 끝점으로 잡으면 $\mathbf{p} \perp \mathbf{a}$이고 $p = a$이다. 그러면 $\mathbf{q} = -\mathbf{p}$이고, 이는 대칭성으로 보아 옳다. 넓이는 $\frac{1}{2}(2a)(a) = a^2$이고, 공식도 $a \cdot a^2/a = a^2$을 준다.
- 두 초점 거리는 $\dfrac{1}{OP} + \dfrac{1}{OQ} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{2p-a}{ap} = \dfrac{2}{a}$를 만족한다. 이는 포물선의 고전적인 초점현(focal chord) 성질이다.
- 수치적으로, $\mathbf{a}$와 P를 무작위로 20 000번 골라 Q, T, T'과 넓이를 확인하였다. 가장 큰 오차는 약 10^{-11}이었다.

흔한 실수

- 모든 λ에 대하여 $|\lambda\mathbf{p}| = \lambda p$라고 쓰는 것. 그러면 유일한 해가 $\lambda = 1$이 되어 Q를 찾을 수 없다.
- 첫 부분에서 역을 잊는 것. Π 너머의 점은 $|a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{r} - a^2$이므로, 이런 점들을 배제해야 한다.
- $\overrightarrow{PQ}$와 $\overrightarrow{PT}$의 외적(cross product)으로 넓이를 계산하는 것. 이 방법도 되지만, $OT \perp PQ$임을 알아차리는 것보다 훨씬 긴 길이다.

STEP 너머

이것은 원뿔곡선(conic)의 초점–준선 정의를 좌표 없이 3차원에서 나타낸 것이다. 이심률(eccentricity)을 e라 하면, 곡면 $e\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}+ar=e\,a^2$($O$로부터의 거리가 Π로부터의 거리의 e배)은 O를 초점으로 하는 다른 회전 이차곡면(quadric of revolution)들을 준다. 관계식 $1/OP+1/OQ=2/a$는 궤도역학(orbital mechanics)의 핵심인 극방정식(polar equation) $\ell/r=1+e\cos\theta$의 벡터 형태이다. 벡터 대수를 더 공부하려면 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)가 좋은 다음 단계이고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 이런 형식의 문제가 더 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.