풀이

STEP II 1988, 문제 1

순수수학 • 부분분수와 급수

STEP II 1988, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s2-q1

핵심 아이디어

f를 부분분수(partial fractions)로 분해하면, 모든 것이 두 개의 간단한 분수 $\frac{1}{x-1}$과 $\frac{1}{x-2}$를 등비급수(geometric series)로 전개하는 문제로 귀결된다. 실제로 결정해야 할 것은 각 분수를 **어느 방향으로** 전개할지뿐이다. 등비급수 $\sum r^n$은 $|r| < 1$일 때에만 수렴(converge)하므로, 각 분수에서 분모의 두 항 가운데 크기가 더 큰 쪽을 묶어 낸다. 이 선택은 $|x|$가 1을 지나고 다시 2를 지날 때 바뀌며, 바로 이 때문에 서로 다른 세 가지 전개가 생긴다.

풀이

부분분수

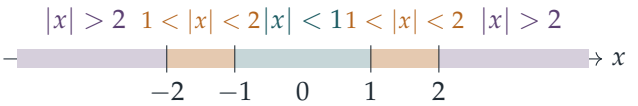
$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$로 놓는다. 가리기 규칙(cover-up rule)에 의해 $A = \frac{1}{1-2} = -1$, $B = \frac{1}{2-1} = 1$이므로

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

필요한 두 가지 기본 재료는 등비급수

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \qquad (|r| < 1),$$

이며, 여기서 r로는 x, $\frac{x}{2}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{2}{x}$ 가운데 지금 다루는 범위에서 절댓값(modulus)이 1보다 작은 것을 쓴다.



범위 $|x| < 1$

이 범위에서는 $|x| < 1$이고 또한 $|\frac{x}{2}| < \frac{1}{2} < 1$이므로, 두 분수를 모두 x의 거듭제곱으로 전개할 수 있다.

$$-\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$
$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

두 식을 더하면

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad (|x| < 1),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

범위 $1 < |x| < 2$

두 번째 분수는 그대로이다. 여전히 $|\frac{x}{2}| < 1$이므로 앞에서와 똑같이 $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(\frac{x}{2})^n$이다.

? **생각해 보기** 첫 번째 분수에 대해 왜 계속 $\sum x^n$을 쓸 수 없을까?

이제 $|x| > 1$이므로 항 x^n이 0으로 가지 않고, 따라서 $\sum x^n$은 발산(diverge)하기 때문이다. 그 대신 분모에서 더 큰 항인 x를 묶어 내면, $|\frac{1}{x}| < 1$인 공비 $\frac{1}{x}$가 남는다.

$$-\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} x^{-n} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^{-(n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n},$$

여기서 마지막 단계는 $n+1$을 n으로 다시 이름 붙인 것일 뿐이다. 두 부분을 더하면

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad (1 < |x| < 2),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

범위 $|x| > 2$

$|\frac{1}{x}| < \frac{1}{2} < 1$이므로 첫 번째 분수는 앞 범위에서의 전개를 그대로 유지한다. 그러나 이제 $|\frac{x}{2}| > 1$이므로, 두 번째 분수도 같은 방식으로 방향을 바꾸어야 한다. 즉 x를 묶어 내면 $|\frac{2}{x}| < 1$인 공비 $\frac{2}{x}$가 남는다.

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{-(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^{-n}.$$

따라서 $|x| > 2$일 때

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}-1)x^{-n}.$$

$n = 1$일 때의 계수는 $2^0 - 1 = 0$이므로, 이 급수는 실제로 x^{-2}부터 시작한다.

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (2^{n-1} - 1)x^{-n} = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{7}{x^4} + \frac{15}{x^5} + \cdots \qquad (|x| > 2).$$

(두 급수가 각각 수렴하므로 두 급수를 항별로 합치는 것은 정당하다.) 두 급수로 나타낸 꼴과 하나로 합친 꼴 모두 올바른 답이다.

검산

- **주된 거동.** $|x|$가 클 때 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \approx \frac{1}{x^2}$이며, 이는 마지막 전개의 첫째 항과 일치한다. x^{-1}의 계수가 0이 되는 것은 우연이 아니다. 두 부분분수가 크기는 같고 부호는 반대인 $\frac{1}{x}$ 거동을 갖기 때문이다.
- **특정한 값.** $x = 3$에서 $\mathrm{f}(3) = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$이고, $\sum_{n \geq 2}(2^{n-1} - 1)3^{-n} = \frac{1}{2}\sum_{n \geq 2}(\frac{2}{3})^n - \sum_{n \geq 2}(\frac{1}{3})^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$이다. 마찬가지로 $\mathrm{f}(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$과 $\mathrm{f}(\frac{3}{2}) = -4$도 처음 두 전개와 일치한다.
- 수치적으로, 세 급수 모두(4000개 항까지 합하면) 각자의 범위 안에 있는 양수와 음수의 무작위 점 수백 개에서 약 10^{-14}의 오차 이내로 f와 일치한다.

흔한 실수

- $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - x/2}$에서 부호를 틀리는 것. 묶어 내는 인수는 2가 아니라 -2이다.
- $\frac{1}{x}$을 곱한 뒤 첨자를 하나 어긋나게 쓰는 것. $\frac{1}{x}\sum_{n \geq 0} x^{-n}$은 x^{-1}부터 시작하므로, 다시 이름 붙인 합은 $n = 1$부터 시작한다.
- 공비의 절댓값이 1보다 작은지 확인하지 않고 모든 범위에서 같은 전개를 쓰는 것.

STEP 너머

이 세 가지 전개는 복소해석학(complex analysis)의 **로랑 급수**(*Laurent series*)가 실변수 세계에 드리운 그림자이다. 복소수 z에 대해 함수 $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$는 영역 $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $|z| > 2$ 각각에서 서로 다른 로랑 전개를 갖는다. 이 영역들은 극(pole)을 지나는 원으로 둘러싸인 원판 하나와 원환(annulus) 두 개이며, 원 $|x| = 1$과 $|x| = 2$가 복소평면에서 바로 이 원들이 된다. 이러한 전개에서 z^{-1}의 계수(유수(residue))가 경로적분(contour integral)을 좌우한다는 사실이 밝혀진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 거듭제곱급수와 로랑 급수를 아름답게 기하학적으로 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.