풀이

# STEP I 1988, 문제 9

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 1988, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q9

## 핵심 아이디어

두 적분 모두 다룰 부분을 제대로 고르기만 하면 표준적인 기법으로 풀린다. (i)에서는 $\ln x$와 $x$의 거듭제곱의 곱이 있으므로 부분적분(integration by parts)을 쓰며, 로그를 미분하여 없앤다. (ii)에서 다루기 까다로운 부분은 제곱근이므로, 이것을 새로운 변수로 삼는다. $\cos x\,\mathrm{d}x$는 바로 이 치환(substitution)에 필요한 것이고, 남는 것은 부분분수(partial fractions)로 처리할 수 있는 유리함수(rational function)이다.

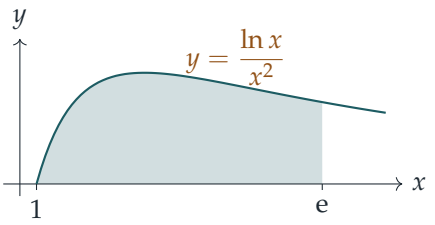
## 풀이

### 소문항 (i)

$u = \ln x$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x^2}$로 두고 부분적분한다. 그러면 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$이고 $v = -\dfrac{1}{x}$이다.

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{\mathrm{e}} - 0\right) + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

여기서 $\ln \mathrm{e} = 1$과 $\ln 1 = 0$을 이용하였다. 답은 양수인데, 피적분함수(integrand)가 $(1, \mathrm{e}]$에서 양수이므로 당연히 그래야 한다.




색칠한 부분의 넓이는 $1 - 2/\mathrm{e} \approx 0.264$이다.

**소문항 (ii)**

피적분함수는 $\sin x \neq 0$이고 $1 + \sin x > 0$일 때 정의된다. 다음과 같이 놓는다.

$$u = \sqrt{1+\sin x}, \qquad \text{그러면} u^2 = 1 + \sin x, \quad 2u\,\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x, \quad \sin x = u^2 - 1.$$

이때 $u > 0$이고, $\sin x \neq 0$이므로 $u \neq 1$이다. 그러면

$$\int \frac{\cos x}{\sin x\sqrt{1+\sin x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2u}{(u^2-1)\,u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u.$$

**생각해 보기** $\cos x$는 어떻게 되었는가? 이것을 $u$로 나타내야 하는가?

그럴 필요가 없다. $\cos x\,\mathrm{d}x$ 전체가 $2u\,\mathrm{d}u$로 바뀌며, 바로 이 때문에 이 치환이 이토록 깔끔하게 통한다. 만약 분자가 다른 것이었다면 $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$가 필요했을 것이고, 부호 문제로 골치를 앓았을 것이다.

부분분수로 분해하면 $\dfrac{2}{u^2-1} = \dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1}$이므로

$$\int \frac{2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \ln|u-1| - \ln|u+1| + C = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C.$$

$x$로 되돌리면

$$\int \frac{\cos x}{\sin x\sqrt{1+\sin x}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sqrt{1+\sin x}+1}\right| + C.$$

절댓값 기호(modulus signs)가 중요하다. $-1 < \sin x < 0$일 때 $0 < u < 1$이므로 $\dfrac{u-1}{u+1}$은 음수이다. (엄밀히 말하면, 정의역(domain)이 $\sin x$의 영점들에 의해 나뉘므로, 피적분함수가 정의되는 각 구간마다 상수가 다를 수 있다.)

분수의 분자와 분모에 $u-1$을 곱하면 동치인 다른 형태를 얻는다. $(u+1)(u-1) = u^2 - 1 = \sin x$이므로 답은 다음과 같이 쓸 수도 있다.

$$2\ln|\sqrt{1+\sin x}-1| - \ln|\sin x| + C.$$

## 검산

- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_1^{\mathrm{e}} x^{-2}\ln x\,\mathrm{d}x \approx 0.264241$이며, 이는 $1-2/\mathrm{e} = 0.264241\ldots$와 일치한다.
- (ii)는 답을 미분해 보면 된다. 연쇄법칙(chain rule)에 의해 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left|\dfrac{u-1}{u+1}\right| = \dfrac{2}{u^2-1}\cdot\dfrac{\cos x}{2u}$이고, 이것은 피적분함수와 같다. 수치적으로는 심프슨 공식으로 피적분함수의 $\int_{0.3}^{1.2}$를 구하면 0.926006이며, 이는 역도함수(antiderivative)의 차와 일치한다. $[-1.2, -0.2]$처럼 $\sin x < 0$인 구간에서도 똑같이 잘 일치하며, 이 구간에서 적분값은 $-2.361027$이다.

## 흔한 실수

- (i)에서 거꾸로 $u = 1/x^2$, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = \ln x$로 고르는 것. 원리상으로는 가능하지만 훨씬 복잡해진다. 로그를 미분하는 쪽을 택하라.
- (ii)에서 절댓값 기호를 빠뜨려서, $\sin x < 0$일 때마다 답이 정의되지 않게 되는 것.
- $2u\,\mathrm{d}u$의 인수 2를 빠뜨려서 답이 절반이 되는 것.

## STEP 너머

소문항 (ii)는 일반적인 원리의 한 예이다. $x$와 $\sqrt{ax+b}$의 유리함수인 피적분함수는 치환 $u = \sqrt{ax+b}$를 하면 $u$의 유리함수가 되고, 유리함수는 언제나 부분분수로 적분할 수 있다. 여기서는 $\sin x$가 $x$의 역할을 한다. 대학 1학년 해석학(analysis) 강의에서는 이 이야기의 다른 면을 만나게 된다. 즉 치환적분과 부분적분을 정당화하는 정리들, 그리고 적분상수(constant of integration)가 정의역의 분리된 구간마다 다를 수 있는 이유를 배운다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)가 이 두 가지를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.