풀이

STEP I 1988, 문제 8

순수수학 • 3차원 기하

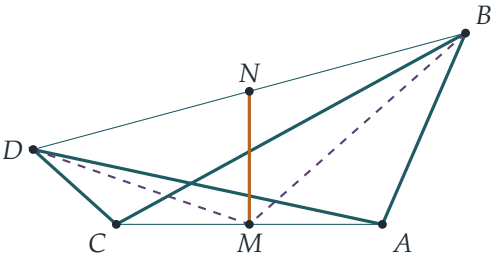
> **STEP I 1988, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q8

핵심 아이디어

각 대각선(diagonal)은 사각형을 두 삼각형으로 나누고, 마주 보는 변의 길이가 같다는 조건 때문에 이 두 삼각형은 합동(congruent)이다(SSS). 합동인 삼각형은 중선(median)의 길이도 같으므로, 한 대각선의 중점(midpoint)은 다른 대각선의 두 끝점에서 같은 거리에 있다. 선분의 두 끝점에서 같은 거리에 있는 점을 그 선분의 중점과 이으면 선분에 수직(perpendicular)인 직선을 얻는다. 이것은 바로 이등변삼각형(isosceles triangle)의 성질이다.

풀이

AC의 중점을 M, BD의 중점을 N이라 하자.



이 그림은 꼬인 사각형(skew quadrilateral)을 평면에 투영한 것이다. 점선 MB와 MD는 아래에서 사용하는 중선이고, 호박색 선분은 MN이다.

먼저, $M \neq N$

직선 MN은 M과 N이 서로 다른 점일 때에만 의미가 있다. 만약 $M = N$이면 대각선 AC와 BD는 한 공통점에서 서로를 이등분한다. 한 공통점을 지나는 두 직선은 한 평면 위에 있으므로 A, B, C, D는 모두 그 평면 위에 있게 되고, $ABCD$는 (평면) 평행사변형(parallelogram)이 된다. $ABCD$는 꼬인 사각형이므로 $M \neq N$이다. 바로 여기에서 "꼬인"이라는 조건이 쓰인다. 평행사변형에서는 마주 보는 변의 길이가 같지만 두 중점이 일치한다.

MN은 BD에 수직이다

대각선 AC를 공유하는 삼각형 ABC와 CDA를 살펴보자.

$$AB = CD, \qquad BC = DA, \qquad CA = AC,$$

이므로 두 삼각형은 $A \leftrightarrow C, B \leftrightarrow D, C \leftrightarrow A$의 대응으로 합동이다(SSS). 이 대응에서 삼각형 ABC의 B에서 AC의 중점으로 가는 중선은 삼각형 CDA의 D에서 CA의 중점으로 가는 중선에 대응한다. 두 중선은 모두 같은 점 M에서 끝나므로

$$MB = MD.$$

? **생각해 보기** 합동인 삼각형은 왜 중선의 길이가 같아야 하는가?

중선은 변의 길이만으로 완전히 결정된다. 예를 들어 코사인 법칙(cosine rule)(또는 아폴로니우스(Apollonius) 정리)에 의해, 삼각형 ABC에서 B로부터 그은 중선의 길이 m은 $4m^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2$를 만족한다. 변의 길이가 같으면 중선의 길이도 같으므로 $MB^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2BC^2 - AC^2) = \frac{1}{4}(2CD^2 + 2DA^2 - CA^2) = MD^2$이다.

이제 M은 B와 D에서 같은 거리에 있고, N은 BD의 중점이다. 삼각형 MNB와 MND는 $MB = MD$, $NB = ND$이고 공통변 MN을 가지므로 합동이며(SSS), 각 $\angle MNB$와 $\angle MND$는 같다. 또한 B, N, D가 한 직선 위에 있으므로 두 각은 서로 보각(supplementary)이다. 따라서 두 각은 각각 직각이고, $MN \perp BD$이다. (이 삼각형들은 퇴화(degenerate)하지 않은 진짜 삼각형이다. 만약 M이 $MB = MD$를 만족하면서 직선 BD 위에 있다면 M은 중점 N이 되는데, 이는 앞에서 배제하였다.)

MN은 AC에 수직이다

두 대각선의 역할을 바꾸어도 같은 논증이 성립한다. 삼각형 ABD와 CDB는 대각선 BD를 공유하고

$$AB = CD, \qquad AD = CB, \qquad BD = DB,$$

이므로 $A \leftrightarrow C, B \leftrightarrow D, D \leftrightarrow B$의 대응으로 합동이다. A와 C에서 그은 중선은 모두 BD의 중점 N에서 끝나므로 $NA = NC$이다. M은 AC의 중점이고 $N \neq M$이므로, 앞의 이등변삼

각형 논증에 의해 $MN \perp AC$이다.

따라서 두 대각선의 중점을 잇는 직선은 각 대각선에 수직이고, 증명이 끝난다.

벡터를 이용한 풀이

원점을 M에 잡으면 위치벡터로 $C = -A$이고, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$이다. 주어진 두 등식을 제곱하면

$$AB^2 = CD^2 \iff |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{d}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{d},$$
$$BC^2 = AD^2 \iff |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{d}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}.$$

두 식을 빼면 $4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -4\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}$, 즉 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{d}) = 0$이다. $\overrightarrow{AC} = -2\mathbf{a}$이므로 이는 $\overrightarrow{MN} \perp AC$를 뜻한다. 원점을 N에 잡으면 같은 방법으로 $MN \perp BD$를 얻는다.

검산

$A = (1,0,0)$, $B = (1,2,1)$, $C = (-1,0,0)$, $D = (-1,-2,1)$로 놓아 보자. 그러면 $AB = CD = \sqrt{5}$, $BC = AD = 3$이고, 네 점은 한 평면 위에 있지 않다(coplanar가 아니다)(스칼라 삼중곱(scalar triple product) $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})$의 값이 8이다). 이때 $M = (0,0,0)$, $N = (0,0,1)$이므로 MN은 z축 방향이고, AC는 x축 방향이며 $\overrightarrow{BD} = (-2,-4,0)$은 z성분이 없다. 따라서 둘 다 MN에 수직이다. 또한 마주 보는 변의 길이가 같은 꼬인 사각형 20 000개를 무작위로 만들어 시험해 보았는데, MN과 각 대각선이 이루는 각의 코사인 값은 한 번도 4×10^{-12}를 넘지 않았다.

흔한 실수

- $M \neq N$인 이유를 설명하지 않는다. 꼬인 사각형이라는 조건이 없으면 결과가 성립하지 않는다. 평행사변형에서는 직선 MN 자체가 존재하지 않기 때문이다.
- 합동인 삼각형을 밝히지 않고 "대칭에 의해" $MB = MD$라고 주장한다.
- 한 대각선에 대한 수직만 증명한다. 두 번째 대각선에 대해서는 다른 합동 삼각형 쌍이 필요하다.

STEP 너머

위의 예에서 z축(직선 MN)을 축으로 하는 반회전(half-turn)은 A와 C를, B와 D를 서로 바꾼다. 이는 일반적으로 성립한다. 마주 보는 변의 길이가 같은 모든 꼬인 사각형은 MN을 축으로 180° 회전하면 자기 자신으로 옮겨진다. (이 회전은 M을 고정하고 MN에 수직인 모든

방향을 반대로 뒤집으므로 A를 C로 보낸다. 마찬가지로 B를 D로 보낸다.) 거꾸로, 이 반회전을 보면 변의 길이가 같다는 사실이 자명해진다. 기하학적 사실을 대칭, 즉 공간의 등거리변환(isometry)의 결과로 보는 관점은 대학 1학년 기하학과 군론(group theory)의 핵심 아이디어이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*는 군론 쪽을 전개하고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 STEP 형식의 기하 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.