풀이

STEP I 1988, 문제 7

순수수학 • 이차식 도함수의 한계

STEP I 1988, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s1-q7

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.6 절 **기울기의 한계**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/markov-bound.html

핵심 아이디어

이차식(quadratic)은 세 점에서의 값으로 완전히 결정되므로, f'을 $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$으로 다시 나타낼 수 있다. 일단 f'을 이렇게 쓰고 나면, 가정 $|f| \le 1$이 세 계수를 각각 통제하고, 나머지는 삼각부등식(triangle inequality)이 해결한다. 마지막 부분에서는 f가 어떤 값을 가질 때 증명에 나온 모든 부등식이 등식이 되는지 살펴본다.

풀이

$f'(x)$에 대한 항등식

$f(1) = a+b+c$, $f(-1) = a-b+c$, $f(0) = c$이다. 우변을 x의 거듭제곱에 따라 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &f(1)\left(x+\tfrac{1}{2}\right) + f(-1)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) - 2f(0)x \\ &\quad = \left[(a+b+c)+(a-b+c)-2c\right]x + \tfrac{1}{2}\left[(a+b+c)-(a-b+c)\right] \\ &\quad = 2ax + b. \end{aligned}$$

$f'(x) = 2ax+b$이므로, 이것이 바로 구하는 항등식이다.

부등식 $|f'(x)| \le 4$

$|x| \le 1$일 때마다 $|f(x)| \le 1$이라고 하자. 특히 $|f(1)|$, $|f(-1)|$, $|f(0)|$은 모두 1 이하이다. $|x| \le 1$인 임의의 x를 잡자. 항등식과 삼각부등식에 의해

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\le |f(1)|\left|x+\tfrac{1}{2}\right| + |f(-1)|\left|x-\tfrac{1}{2}\right| + 2|f(0)|\,|x| \\ &\le \left|x+\tfrac{1}{2}\right| + \left|x-\tfrac{1}{2}\right| + 2|x|. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** $|x| \le 1$일 때 $\left|x+\frac{1}{2}\right| + \left|x-\frac{1}{2}\right|$은 얼마나 커질 수 있을까?

이것은 x에서 $\frac{1}{2}$까지의 거리와 $-\frac{1}{2}$까지의 거리의 합이다. $|x| \le \frac{1}{2}$이면 x는 두 점 사이에 있으므로 합은 정확히 1이다. $|x| > \frac{1}{2}$이면 두 점이 모두 x의 같은 쪽에 있으므로 합은 $2|x|$이다. 어느 경우든 $|x| \le 1$이면 이 합은 2 이하이다. 또한 $2|x| \le 2$이므로

$$|f'(x)| \le 2 + 2 = 4 \qquad \text{단, } |x| \le 1,$$

이 되어 증명이 끝난다.

(다른 방법으로 보면, f'은 일차함수이므로 $[-1, 1]$에서 그 절댓값은 끝점에서 가장 크고, $x = \pm 1$에서의 부등식은 $|f'(\pm 1)| \le \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 4$가 된다.)

등호가 성립하는 경우

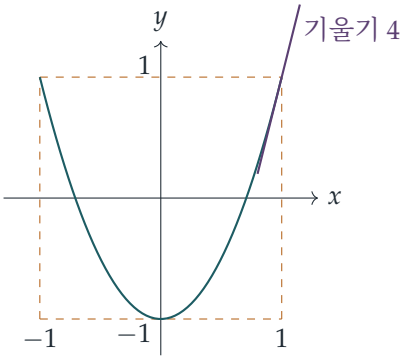
$x = 1$에서 등호가 성립하려면 위의 모든 단계가 그 점에서 등식이 되어야 한다. $x = 1$에서 계수 $x + \frac{1}{2}$, $x - \frac{1}{2}$, $-2x$는 각각 $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, -2이다. 따라서 $f'(1) = +4$를 얻으려면 다음이 필요하다.

$$f(1) = 1, \qquad f(-1) = 1, \qquad f(0) = -1.$$

이로부터 $c = -1$, $a + b + c = 1$, $a - b + c = 1$이므로 $b = 0$, $a = 2$이다.

$$a = 2, \quad b = 0, \quad c = -1, \qquad f(x) = 2x^2 - 1.$$

이제 조건을 확인하자. $|x| \le 1$이면 $0 \le x^2 \le 1$이므로 $-1 \le 2x^2 - 1 \le 1$, 즉 $|f(x)| \le 1$이다. 그리고 $f'(x) = 4x$이므로, 구간 안의 점 $x = 1$에서 $f'(1) = 4$이다. 이것이 우리가 찾는 예이다.



곡선 $y = 2x^2 - 1$(청록색)은 정사각형 $|x| \le 1, |y| \le 1$ 안에 머물면서 위에서 아래로 내려갔다가 다시 올라오므로, 양 끝에서 가능한 한 가장 가파르다.

($\pm(2x^2 - 1)$ 중 어느 것이든 $|f'(\pm 1)| = 4$를 준다. $f(x) = 2x^2 - 1$로 택하면 $f'(1) = +4$이고, $-(2x^2 - 1)$도 $x = -1$에서 같은 값을 준다.)

검산

- $f(x) = x^2 + x + 1$로 시험해 보자. $f(1) = 3, f(-1) = 1, f(0) = 1$이다. $x = 2$에서 항등식은 $3 \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot 2 = 5 = f'(2)$를 준다.
- $\max_{|x|\le 1} |f(x)| = 1$이 되도록 크기를 조정한 20,000개의 이차식을 무작위로 탐색했을 때, $\max_{|x|\le 1} |f'(x)| = 2|a| + |b|$가 4를 넘는 경우는 한 번도 없었고(가장 큰 값은 약 3.91이었다), $2x^2 - 1$은 정확히 4에 도달한다.

흔한 실수

- $\left|x + \frac{1}{2}\right|$과 $\left|x - \frac{1}{2}\right|$을 각각 따로 $\frac{3}{2}$로 어림하는 것. 그러면 $|f'(x)| \le 5$밖에 얻지 못한다. 두 거리는 함께 어림해야 한다.
- 0과 ± 1에서만이 아니라 구간 전체에서 $|f(x)| \le 1$인지 확인하지 않고 예를 제시하는 것.

STEP 너머

이것은 마르코프 부등식(Markov's inequality)의 이차인 경우이다. 즉 차수가 n인 다항식 p가 $[-1, 1]$에서 $|p| \le 1$을 만족하면, 그 구간에서 $|p'| \le n^2$이다. 등호는 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomial) $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$에서 성립하며, $2x^2 - 1 = T_2(x)$이다. 다항식을 선택한 점들에서의 값으로 나타내는 것은 라그랑주 보간법(Lagrange interpolation)으로, 수치해석과 근사 이론의 기본 도구이다. 이런 성격의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced*

*Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.