풀이

STEP I 1988, 문제 6

순수수학 • 복소수와 기하

STEP I 1988, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s1-q6

핵심 아이디어

아르강 도표(Argand diagram)에서 벡터 $\overrightarrow{P_jP_k}$는 그저 복소수 $z_k - z_j$이다. 따라서 두 벡터가 같다는 것은 두 차가 같다는 것이 되고, 수직(perpendicular)이라는 것은 "한 차를 다른 차로 나눈 값이 순허수(purely imaginary)이다"라는 것이 된다. 주어진 값을 대입하면 조건 (i)에 의해 z_4와 w가 z로 결정되고, 조건 (ii)에 의해 z의 허수부(imaginary part)가 정해진다. 그러면 이 육각형(hexagon)은 그 중심에 대하여 대칭임이 드러나고, 덕분에 볼록성과 마지막 각을 쉽게 다룰 수 있다.

풀이

명제를 식으로 옮기기

$\overrightarrow{P_jP_k}$는 $z_k - z_j$로 나타내어지므로, 명제 (i)은 다음과 같다.

$$z_2 - z_1 = z_4 - z_5 \qquad \text{그리고} \qquad z_3 - z_2 = z_5 - z_6.$$

(ii)의 경우, 영이 아닌 두 벡터 u와 v가 수직일 필요충분조건은 두 벡터의 편각(argument)의 차가 $\pm\frac{\pi}{2}$인 것, 즉 u/v가 순허수인 것이다. 점들은 서로 다르므로 $z_4 - z_2 \neq 0$이고 $z_6 - z_3 \neq 0$이며, 명제 (ii)는 다음과 같다.

$$\frac{z_4 - z_2}{z_6 - z_3} \text{ 는 순허수이다,} \qquad \text{동치로} \qquad \operatorname{Re}\left[(z_4 - z_2)\,\overline{(z_6 - z_3)}\right] = 0.$$

(i)에서 얻는 결과

(i)의 두 식을 더하면 z_2와 z_5 항이 소거된다.

$$z_3 - z_1 = z_4 - z_6, \qquad \text{따라서} \qquad z_4 - z_3 = z_6 - z_1,$$

이것이 바로 요구된 명제 $\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_1P_6}$이다.

육각형

이제 $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = z, z_5 = \mathrm{i}, z_6 = w$로 놓자. (i)의 첫째 식에서

$$z_4 = z_5 + z_2 - z_1 = 1 + \mathrm{i},$$

를 얻고, 둘째 식에서 $z - 1 = \mathrm{i} - w$를 얻으므로

$$w = 1 + \mathrm{i} - z.$$

이다. $z_1 + z_4 = z_2 + z_5 = z_3 + z_6 = 1 + \mathrm{i}$임에 주목하자. 마주 보는 꼭짓점들이 점 $\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})$에 대하여 대칭이므로, 이 육각형은 대칭중심(centre of symmetry)을 가진다.

(ii)에서 $z_4 - z_2 = \mathrm{i}$이고 $z_6 - z_3 = w - z = 1 + \mathrm{i} - 2z$이다. 몫 $\mathrm{i}/(1 + \mathrm{i} - 2z)$가 순허수일 필요충분조건은 $1 + \mathrm{i} - 2z$가 실수인 것, 즉 $1 - 2\,\mathrm{Im}(z) = 0$인 것이다. 따라서

$$\mathrm{Im}(z) = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{그러면} \qquad \mathrm{Im}(w) = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

a를 실수로 하여 $z = a + \frac{1}{2}\mathrm{i}$로 쓰자. 그러면 $w = (1-a) + \frac{1}{2}\mathrm{i}$이므로 항상 $\mathrm{Re}(w) = 1 - \mathrm{Re}(z)$이다. 여섯 꼭짓점은

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (a, \tfrac{1}{2}), \quad (1,1), \quad (0,1), \quad (1-a, \tfrac{1}{2}) :$$

이다. 즉 단위정사각형의 두 세로변 각각의 중간 높이에 "뾰족한 점"을 하나씩 덧붙인 모양이다.

? 생각해 보기 그림에 기대지 않고 볼록성을 어떻게 판정할 수 있을까?

육각형의 둘레를 순서대로 따라 걸어 보자. 육각형이 볼록(convex)일 필요충분조건은 각 꼭짓점에서 항상 같은 방향으로 꺾는 것이다. 한 꼭짓점에서 꺾는 방향은 들어오는 변 u와 나가는 변 v의 외적(cross product) $\mathrm{Im}(\bar{u}v) = u_x v_y - u_y v_x$의 부호로 측정된다. 변들은

$$P_1P_2 = (1,0), \quad P_2P_3 = (a-1, \tfrac{1}{2}), \quad P_3P_4 = (1-a, \tfrac{1}{2}),$$
$$P_4P_5 = (-1,0), \quad P_5P_6 = (1-a, -\tfrac{1}{2}), \quad P_6P_1 = (a-1, -\tfrac{1}{2}),$$

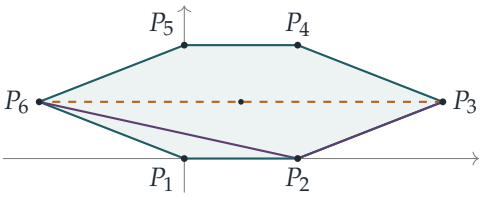
이고, $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_1$에서의 외적은 차례로

$$\tfrac{1}{2}, \qquad a-1, \qquad \tfrac{1}{2}, \qquad \tfrac{1}{2}, \qquad a-1, \qquad \tfrac{1}{2}.$$

이다. 이 중 넷은 a의 값과 관계없이 양수이므로, 육각형이 볼록일 필요충분조건은 $a-1>0$이다. ($a=1$이면 P_3이 선분 P_2P_4 위에 놓이므로 진짜 육각형이 되지 않는다.) 기하적으로 말하면, P_3은 정사각형의 변 $x=1$보다 오른쪽에 있어야 하고, 대칭성에 의해 P_6은 $x=0$보다 왼쪽에 있어야 한다. 따라서 조건은

$$\boxed{\mathrm{Re}(z)>1 \quad \text{이고} \quad \mathrm{Re}(w)=1-\mathrm{Re}(z) \ \ (\text{따라서} \mathrm{Re}(w)<0)}$$

이다. (여기에 (ii)가 이미 강제하는 $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(w)=\frac{1}{2}$가 함께 성립한다.)



거리 P_3P_6

P_2에서 뻗어 나가는 두 팔은

$$z_3-z_2=(a-1)+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}, \qquad z_6-z_2=-a+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}.$$

이다. 각 $\theta=\angle P_3P_2P_6$ (0과 π 사이)에 대하여, 두 팔의 내적(dot product)은 $|P_2P_3|\,|P_2P_6|\cos\theta$이고, 외적의 크기는 $|P_2P_3|\,|P_2P_6|\sin\theta$이다.

$$\text{내적}=-a(a-1)+\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4}(1+4a-4a^2), \qquad \text{외적}=(a-1)\cdot\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cdot(-a)=\tfrac{1}{2}(2a-1).$$

$a>1$이면 외적이 양수이므로 이것이 정확히 $\sin\theta$ 항이 되고,

$$\tan\theta=\frac{\frac{1}{2}(2a-1)}{\frac{1}{4}(1+4a-4a^2)}=\frac{2(2a-1)}{1+4a-4a^2}.$$

이다. 이 값을 $-\frac{2}{3}$과 같다고 놓으면

$$3(2a-1)=-(1+4a-4a^2) \quad\Longrightarrow\quad 4a^2-10a+2=0 \quad\Longrightarrow\quad 2a^2-5a+1=0,$$

이므로 $a=\frac{1}{4}(5\pm\sqrt{17})$이다. 음의 부호를 택하면 $a\approx 0.22$가 되어 볼록성 조건 $a>1$을 어기고, 양의 부호를 택하면 $a\approx 2.28>1$이다. (이때 분모 $1+4a-4a^2$는 음수이므로, 탄젠트가 음수라는 조건에 맞게 θ는 둔각이다.)

마지막으로 P_3과 P_6은 허수부가 같으므로

$$P_3P_6=|z-w|=|2a-1|=2a-1=\frac{5+\sqrt{17}}{2}-1=\boxed{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}\approx 3.56.$$

이다.

볼록성 조건을 빼면, 같은 방법(이번에는 분자에 $|2a-1|$을 둔다)으로 해가 하나 더 나온다. 바로 $a = \frac{1}{4}(-1-\sqrt{17})$이다. 이것은 z와 w를 맞바꾸는 대칭 $a \mapsto 1-a$에 의한 거울상일 뿐이며, 같은 거리 $\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$를 준다.

검산

- 대칭성: $z_1 + z_4 = z_2 + z_5 = z_3 + z_6$이므로, 결과 $\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_1P_6}$는 점대칭(centrally symmetric) 육각형의 세 번째 대변 쌍에 대한 사실일 뿐이다.
- $a = \frac{1}{4}(5+\sqrt{17}) \approx 2.2808$로 두고 $\arg\left((z_6-z_2)/(z_3-z_2)\right)$를 직접 계산하면 탄젠트가 -0.66667인 각을 얻고, $|z-w| \approx 3.5616 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$이다.
- a를 -5부터 5까지 바꾸어 가며 볼록성을 수치적으로 시험해 보면, 육각형이 볼록인 것은 정확히 $a > 1$일 때임이 확인된다.

흔한 실수

- 벡터의 방향을 거꾸로 잡는 것: $\overrightarrow{P_5P_4}$는 $z_5 - z_4$가 아니라 $z_4 - z_5$이다.
- 수직 조건을 "기울기의 곱이 -1이다"로 쓰고 나서 수직선인 경우를 놓치는 것. 여기서 $\overrightarrow{P_2P_4}$는 수직선 방향이며, 몫을 이용한 판정법은 이 경우를 깔끔하게 처리한다.
- 근 $a = \frac{1}{4}(5-\sqrt{17})$를 버리지 않는 것. 이 값은 볼록 육각형을 주지 않는다(실제로 이때는 $\tan\theta > 0$이 된다).

STEP 너머

점을 복소수로 다루면 기하가 대수로 바뀐다. 평행이동은 덧셈이 되고, 회전과 확대·축소는 곱셈이 된다. "u/v가 순허수이다"라는 판정법은 각이 편각으로 바뀌는 한 예이다. 볼록성을 판정하는 외적 부호 판정법은 계산기하학에서 표준적인 볼록 껍질(convex hull) 알고리즘의 바탕이 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(복소해석을 시각적으로 다룬 책)는 복소수에 대한 이러한 기하적 관점을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.