풀이

STEP I 1988, 문제 5

순수수학 • 급수와 생성함수

> **STEP I 1988, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q5

핵심 아이디어

각 인수를 등비급수(geometric series)로 전개하고(지수가 -1인 이항정리(binomial theorem)) 서로 곱한다. 그러면 c_m은 유한 등비합이 되고, 이는 깔끔한 닫힌 형태(closed form)를 갖는다. c_m^2을 세 개의 순수한 거듭제곱 $(a^2)^m$, $(ab)^m$, $(b^2)^m$의 결합으로 나타내고 나면, 마지막 급수는 세 개의 등비급수로 나뉜다. 나머지는 분수를 다루는 꼼꼼한 계산과, 각 급수가 어디에서 수렴(converge)하는지를 놓치지 않는 일이다.

풀이

c_m 구하기

지수가 -1인 이항정리에 의해

$$(1-ax)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k \quad (|ax|<1), \qquad (1-bx)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} b^j x^j \quad (|bx|<1).$$

$0<a<b$이므로 조건 $b|x|<1$에서 $a|x|<b|x|<1$을 얻고, 따라서 두 전개는 모두 성립한다. 두 급수는 모두 절대수렴(absolutely converge)하므로, 서로 곱한 뒤 x의 거듭제곱별로 정리해도 된다. x^m의 계수는 $k+j=m$인 순서쌍들에서 나온다.

$$c_m = \sum_{k=0}^{m} a^k b^{m-k} = b^m + ab^{m-1} + \cdots + a^{m-1}b + a^m.$$

이는 첫째항이 b^m, 공비가 a/b이고 항이 $m+1$개인 등비급수이다. $a \neq b$이므로 그 합은

$$c_m = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{b-a}.$$

(같은 말로, $(b-a)c_m = b^{m+1} - a^{m+1}$이다. 곱을 전개하면 합의 항들이 연쇄적으로 상쇄(telescope)되기 때문이다.)

c_m^2에 대한 공식

제곱하고 $(b-a)^2 = (a-b)^2$을 이용하면

$$c_m^2 = \frac{(b^{m+1} - a^{m+1})^2}{(b-a)^2} = \frac{a^{2m+2} - 2(ab)^{m+1} + b^{2m+2}}{(a-b)^2},$$

이므로 요구된 식을 얻는다.

급수 $\sum c_m^2 x^m$

앞의 공식의 요점은 각 항이 상수와 m제곱의 곱이라는 것이다.

$$c_m^2 x^m = \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^2\,(a^2x)^m - 2ab\,(abx)^m + b^2\,(b^2x)^m\right).$$

따라서 $\sum c_m^2 x^m$은 공비가 a^2x, abx, b^2x인 세 등비급수의 결합이다.

? **생각해 보기** 어떤 x에 대해 세 등비급수가 모두 수렴하는가?

$|a^2x| < 1$, $|abx| < 1$, $|b^2x| < 1$이 필요하다. $0 < a^2 < ab < b^2$이므로 마지막 조건이 가장 강하고, 나머지 두 조건은 이로부터 따라 나온다. 따라서 세 급수가 모두 수렴하는 것은 정확히 $|x| < 1/b^2$일 때이다. 이때 각 등비급수를 합하면

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 x^m = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{1-a^2x} - \frac{2ab}{1-abx} + \frac{b^2}{1-b^2x}\right).$$

모든 항을 공통분모 $(1-abx)(1-a^2x)(1-b^2x)$로 통분한다. 분자는

$$N = a^2(1-abx)(1-b^2x) - 2ab(1-a^2x)(1-b^2x) + b^2(1-a^2x)(1-abx).$$

이를 x의 거듭제곱별로 정리한다.

$$\begin{aligned}
\text{상수항:}\quad & a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,\\
\text{계수}x:\quad & -a^2(ab+b^2) + 2ab(a^2+b^2) - b^2(a^2+ab)\\
& \qquad = a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 = ab(a-b)^2,\\
\text{계수}x^2:\quad & a^2\cdot ab^3 - 2ab\cdot a^2b^2 + b^2\cdot a^3b = 0.
\end{aligned}$$

따라서 $N = (a-b)^2(1+abx)$이다. 인수 $(a-b)^2$이 약분되어 다음이 남는다.

$$c_0^2 + c_1^2x + c_2^2x^2 + \cdots = \frac{1+abx}{(1-abx)(1-a^2x)(1-b^2x)} \qquad \text{단, } -\frac{1}{b^2} < x < \frac{1}{b^2}.$$

이 구간은 더 넓어질 수 없다. $x = \pm 1/b^2$에서 각 항은

$$|c_m^2 x^m| = \frac{(b^{m+1} - a^{m+1})^2}{(b-a)^2\, b^{2m}} = \frac{b^2(1-(a/b)^{m+1})^2}{(b-a)^2} \to \frac{b^2}{(b-a)^2} \neq 0,$$

을 만족하므로 급수는 그 점에서 발산(diverge)한다. 또한 $|x| > 1/b^2$에서는 항이 한없이 커지므로 역시 발산한다.

검산

$a = 1, b = 2$로 놓자. 그러면 $c_m = 2^{m+1} - 1$이므로 $c_0, c_1, c_2 = 1, 3, 7$이고, 직접 계산해도 $\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + 2x + 4x^2 + \dots) = 1 + 3x + 7x^2 + \cdots$이다. 제곱은 $1, 9, 49$이다. 반대쪽에서는 $\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-4x)} = 1 + 7x + 35x^2 + \cdots$이고, 여기에 $1 + 2x$를 곱하면 $1 + 9x + 49x^2 + \cdots$가 되어 예상대로 맞는다. 수치적으로도 $a = 0.7$, $b = 1.3$, $x = 0.3$일 때 $c_m^2 x^m$을 많은 항까지 더하면 $4.163878\ldots$이 나와 닫힌 형태와 일치한다.

흔한 실수

- 앞 소문항의 조건을 그대로 가져와 구간을 $b|x| < 1$로 답하는 것. 새 급수의 공비는 a^2x, abx, b^2x이므로 조건은 $b^2|x| < 1$이다.
- c_m을 합의 꼴로 그대로 두는 것. 닫힌 형태 $(b^{m+1} - a^{m+1})/(b-a)$가 있어야 문제의 나머지 부분이 풀린다.
- N에서 x의 계수를 구할 때 부호를 틀리는 것. 요령을 부리기보다 각 곱을 항별로 꼼꼼히 전개하는 편이 더 빠르다.

STEP 너머

급수 $\sum c_m x^m$은 수열 c_m의 **생성함수**(generating function)이며, 이 문제는 어떤 수열이 유리 생성함수를 가지면 그 제곱들의 수열도 유리 생성함수를 가진다는 것을 보여 준다. 이는 두 유리 멱급수의 **아다마르 곱**(Hadamard product)이 항상 유리함수라는 사실의 특수한 경우이다. 여기서 구한 구간은 **수렴반지름**(radius of convergence)의 한 예이다. 유리함수의 멱급수(power series)는 가장 가까운 극(pole)까지 수렴하며, 여기서는 그 극이 $x = 1/b^2$이다. 생성함수는 Wilf의 *generatingfunctionology*에서 아름답게 전개되고, 멱급수와 그 수렴은 Abbott의 *Understanding Analysis*에서 꼼꼼하게 다루어진다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.