풀이

STEP I 1988, 문제 4

순수수학 • 직선의 교점 개수 세기

> **STEP I 1988, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q4

핵심 아이디어

모든 선분을 한꺼번에 머릿속에 그리려 하지 말자. 대신 두 선분이 언제 교차하는지를 묻는다. 답은 두 선분의 끝점이 각 축 위에서 놓인 순서에만 달려 있으며, 이 덕분에 모든 교점은 각 축에서 두 점을 고르는 일로 바뀐다. 한 선분 위의 교점 개수를 셀 수 있게 되면, 가장 많거나 가장 적은 교점을 가진 선분과 마지막 평균(average)은 꼼꼼히 셈을 정리하는 것만으로 얻어진다.

풀이

y축 위의 점들을 원점 O로부터의 거리가 증가하는 순서대로 $B_1, \ldots, B_m$이라 하고, x축 위의 점들도 같은 방식으로 $A_1, \ldots, A_n$이라 하자. 선분(segment) B_iA_j를 s_{ij}로 나타낸다.

소문항 (i)

m개의 점 B_i 각각이 n개의 점 A_j 각각과 연결되므로, 선분은

$$mn$$

개이다.

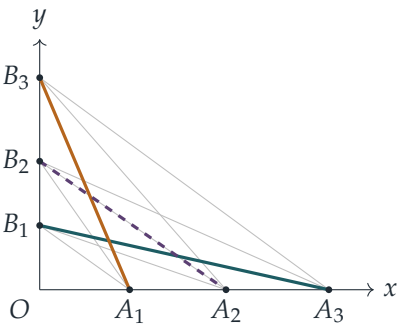
소문항 (ii)

서로 다른 두 선분 s_{ij}와 s_{kl}을 생각하자.

- $i = k$ 또는 $j = l$이면 두 선분은 끝점을 공유한다. 한 점에서 나온 서로 다른 두 선분은 그 점에서만 만나며, 이러한 만남은 세지 않는다.

- $i < k$이고 $j < l$이면, B_i와 A_j는 모두 직선 B_kA_l에 대하여 O와 같은 쪽에 있다(이 점들은 삼각형 OB_kA_l의 변 OB_k와 OA_l 위에 있고, B_k나 A_l과 일치하지 않는다). 끝점이 모두 어떤 직선의 한쪽에 엄격하게 놓인 선분은 그 쪽에 머무르므로, s_{ij}는 s_{kl}과 절대 만나지 않는다. 즉 그 아래에 "포개어져" 있다.
- $i < k$이고 $j > l$이면, B_i는 직선 B_kA_l에 대하여 O와 같은 쪽에 있고 A_j는 반대쪽에 있다. 따라서 s_{ij}는 그 직선을 가로지른다. 마찬가지로 A_l은 직선 B_iA_j에 대하여 O 쪽에 있고 B_k는 반대쪽에 있다. 각 선분이 다른 선분의 두 끝점을 갈라놓으므로, 두 선분은 끝점이 아닌 정확히 한 점에서 교차한다.

$i > k$인 경우는 두 선분의 역할을 바꾸면 똑같다.



그림($m = n = 3$)에서 청록색 s_{13}과 호박색 s_{31}은 끝점의 순서가 서로 반대이므로 교차한다. 점선 s_{22}도 이 두 선분과 각각 교차한다.

따라서 내부의 한 점에서 교차하는 선분의 쌍은 모두 두 점 B_i, B_k $(i < k)$와 두 점 A_j, A_l $(j < l)$을 고른 다음 s_{il}과 s_{kj}를 택하여 얻어진다. 역으로, 이러한 선택 하나하나는 정확히 하나의 교차하는 쌍을 준다. 어떤 세 선분도 내부의 한 점을 함께 지나지 않으므로, 서로 다른 쌍은 서로 다른 점을 준다. 그러므로 교점(point of intersection)의 개수는

$$\binom{m}{2}\binom{n}{2} = \frac{m(m-1)n(n-1)}{4}.$$

이다.

평균

한 선분 위의 교점. 위의 규칙에 따라 s_{ij}가 s_{kl}과 교차할 필요충분조건은 $k < i$, $l > j$ 또는 $k > i$, $l < j$이다. 따라서 s_{ij} 위의 교점의 개수는

$$c_{ij} = (i-1)(n-j) + (m-i)(j-1).$$

이다.

$m = n$일 때 극단적인 선분. $N = n-1, a = i-1, b = j-1$로 놓으면 $0 \le a, b \le N$이고

$$c_{ij} = a(N-b) + (N-a)b = N(a+b) - 2ab = \tfrac{1}{2}\big(N^2 - (N-2a)(N-2b)\big),$$

임을 전개하여 확인할 수 있다. $|N-2a| \le N$이고 $|N-2b| \le N$이므로, 곱 $(N-2a)(N-2b)$는 $-N^2$과 N^2 사이에 있다. 그러므로 $0 \le c_{ij} \le N^2$이고, 다음이 성립한다.

- $c_{ij} = N^2$인 것은 $(N-2a)(N-2b) = -N^2$, 즉 $\{a, b\} = \{0, N\}$일 때뿐이다. 이는 두 선분 s_{1n}과 s_{n1}이다.
- $c_{ij} = 0$인 것은 $(N-2a)(N-2b) = N^2$, 즉 $a = b = 0$ 또는 $a = b = N$일 때뿐이다. 이는 두 선분 s_{11}과 s_{nn}이다.

(여기서 $N \ge 2$이므로 이 네 선분은 서로 다르다.) 따라서 가장 많은 $(n-1)^2$개의 점을 가진 선분은 정확히 두 개이고, 가장 적은 0개의 점을 가진 선분도 정확히 두 개이다. 이들을 제거하면 $n^2 - 4$개의 선분이 남는다.

? 생각해 보기 정확히 무엇의 평균을 구하는 것인가?

네 선분을 제거한 뒤 남아 있는 교점, 즉 남은 두 선분 사이의 교점을 각 점마다 한 번씩 센다. 그런 다음 남은 선분의 개수로 나눈다. (그 대신 남은 각 선분 위의 교점 개수를 모두 더하면, 모든 점이 두 번씩 세어지고 사라진 점 일부도 여전히 세어진다. 그러면 $\frac{1}{2}(n-1)^2$이 나오는데, 이는 문제에 주어진 답이 아니다. 흔한 실수를 참고하라.)

사라지는 점. 선분 s_{11}과 s_{nn} 위에는 교점이 없으므로 이들을 제거해도 잃는 것이 없다. 선분 s_{1n}과 s_{n1} 위에는 각각 $(n-1)^2$개의 점이 있다. 이 두 선분은 서로 교차하므로($1 < n$이고 $n > 1$), 정확히 한 점이 두 선분 위에 함께 놓인다. 포함배제의 원리(inclusion–exclusion)에 따라 사라지는 점의 개수는 $2(n-1)^2 - 1$이다.

남는 점. $m = n$일 때 소문항 (ii)로부터 남는 점의 개수는

$$\begin{aligned}\frac{n^2(n-1)^2}{4} - 2(n-1)^2 + 1 &= \frac{(n-1)^2(n^2-8)+4}{4} \\ &= \frac{n^4 - 2n^3 - 7n^2 + 16n - 4}{4} \\ &= \frac{(n-2)(n^3 - 7n + 2)}{4}.\end{aligned}$$

이다. 인수분해(factorisation)는 $n = 2$일 때 이 사차식이 $16 - 16 - 28 + 32 - 4 = 0$이 되므로 $n-2$가 인수라는 점에서 얻는다. $(n-2)(n^3 - 7n + 2) = n^4 - 2n^3 - 7n^2 + 16n - 4$로 전개하여 확인할 수 있다.

평균. 남은 $n^2 - 4 = (n-2)(n+2)$개의 선분으로 나누고 $n - 2 \ne 0$ ($n \ge 3$이므로)을 약분하면, 평균은

$$\frac{(n-2)(n^3 - 7n + 2)}{4(n-2)(n+2)} = \frac{n^3 - 7n + 2}{4(n+2)},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

검산

$n = 3$일 때 공식은 $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$를 준다. 직접 확인해 보자. $s_{11}, s_{33}, s_{13}, s_{31}$을 제거하면 $s_{12}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{32}$가 남는다. 이 가운데 끝점의 순서가 서로 반대인 것은 s_{12}와 s_{21}, 그리고 s_{23}과 s_{32}뿐이므로, 5개의 선분 위에 2개의 점이 있고 평균은 $\frac{2}{5}$이다. 컴퓨터로도 검산하였다. 두 축 위에 무작위로 점을 놓고 정확한 산술로 모든 교점을 찾아 mn, $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$, c_{ij}를 확인하였다. 또한 3부터 29까지의 모든 n에 대하여 평균 공식도 확인하였다.

흔한 실수

- 남은 각 선분 위의 교점 개수를 모두 더하는 것. 각 점은 두 선분 위에 있으므로 이렇게 하면 두 번씩 세어지고, 제거된 선분과 공유하는 점도 여전히 포함된다. 그 결과는 주어진 공식이 아니라 $\frac{1}{2}(n-1)^2$이다.
- s_{1n}과 s_{n1}이 서로 교차한다는 사실을 잊고 $2(n-1)^2 - 1$ 대신 $2(n-1)^2$을 빼는 것.
- 교점의 개수를 선분의 쌍의 개수 $\binom{mn}{2}$로 세는 것. 대부분의 쌍은 끝점을 공유하거나 포개어져 있어서 교차하지 않는다.

STEP 너머

이 문제의 핵심은 전단사(bijection)이다. 교점은 각 축에서 두 점을 고르는 방법과 정확히 일대일로 대응한다. 이것은 조합론(combinatorics)의 기본 도구이다. 같은 그림이 완전 이분 그래프(complete bipartite graph) $K_{m,n}$의 "교차수(crossing number)"에서도 나타난다. Zarankiewicz의 그림(각 축의 양쪽에 점을 놓는다는 점을 빼면 바로 이 그림이다)은 $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$개의 교점을 사용하는데, 이것이 언제나 가능한 최솟값인지는 아직 미해결 문제이다. 전단사를 이용한 세기를 더 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를, 그래프 이론에 대해서는 Wilson의 *Introduction to Graph Theory*(그래프 이론 입문)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.