풀이

STEP I 1988, 문제 3

순수수학 • 기하학적 극값 한계

STEP I 1988, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s1-q3

핵심 아이디어

정사각형의 점이 O에서 **멀리** 떨어져 있다면 어디에 있을 수 있는지 물어보자. 그런 점은 반대쪽 꼭짓점 근처의 작은 영역에 갇혀 있어야 한다. P와 Q가 모두 O에서 멀다면 둘 다 그 작은 영역 안에 있으므로 서로 가깝다. 수 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$는 바로 이 논증이 성립하게 만드는 크기이며, 정사각형 안에 대칭적으로 놓인 정삼각형(equilateral triangle)에서 나온다.

풀이

단위는 센티미터로 하고, O를 원점, 정사각형을 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$로 둔다. 다음과 같이 쓰고

$$s = \sqrt{6}-\sqrt{2}, \qquad s^2 = 6+2-2\sqrt{12} = 8-4\sqrt{3} \approx 1.072,$$

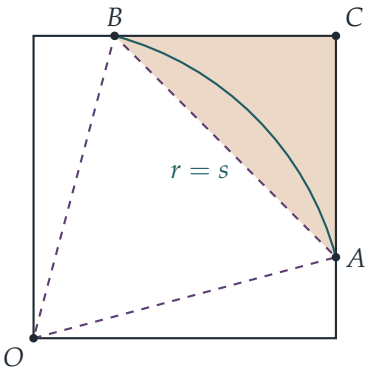
$t = 2-\sqrt{3} \approx 0.268$이라 하자. 점들을 다음과 같이 정의한다.

$$A = (1,t), \qquad B = (t,1), \qquad C = (1,1).$$

그러면

$$\begin{aligned} OA^2 = OB^2 &= 1+(2-\sqrt{3})^2 = 8-4\sqrt{3} = s^2, \\ AB^2 &= 2(1-t)^2 = 2(\sqrt{3}-1)^2 = 8-4\sqrt{3} = s^2, \\ AC = BC &= 1-t = \sqrt{3}-1 \approx 0.732 < s. \end{aligned}$$

따라서 OAB는 정사각형 안에 있는 한 변의 길이가 s인 정삼각형이다.



청록색 호는 O를 중심으로 하는 반지름 s인 원이다. 정사각형에서 이 호 바깥에 있는 부분은 색칠한 삼각형 ABC 안에 놓인다.

1단계: O에서 먼 점은 삼각형 ABC 안에 있다

직선 AB는 $x+y=1+t$이다. 정사각형 중에서 이 직선을 기준으로 O 쪽에 있는 부분 $\{x+y\le 1+t\}$를 생각하자. 이것은 다음 꼭짓점들을 갖는 오각형이다.

$$O=(0,0),\quad (1,0),\quad A,\quad B,\quad (0,1).$$

함수 x^2+y^2은 볼록(convex) 함수이므로, 이 볼록 오각형 위에서의 최댓값은 꼭짓점에서 얻어진다. 꼭짓점에서의 값은 $0, 1, s^2, s^2, 1$이고, 가장 큰 값은 s^2이다. 그러므로 정사각형의 모든 점에 대하여

$$x+y\le 1+t \implies x^2+y^2\le s^2$$

이다. 이를 뒤집어 말하면, 정사각형의 점 (x,y)와 O 사이의 거리가 s보다 **크면** $x+y>1+t$이고, $x\le 1, y\le 1$이므로 그 점은 삼각형 ABC 안에 있다.

? **생각해 보기** 삼각형의 두 점 사이의 거리 중 가장 큰 것이 왜 한 변의 길이일까?

Q를 고정하자. 거리 $|PQ|$는 P에 대한 볼록 함수이므로, 삼각형 위에서 P가 꼭짓점일 때 가장 크다. 이제 그 꼭짓점을 고정하고 Q를 움직이면, 같은 논증으로 Q도 꼭짓점으로 잡을 수 있다. 따라서 삼각형의 두 점 사이의 최대 거리는 두 꼭짓점 사이의 거리, 즉 가장 긴 변의 길이이다.

2단계: 모순

$OP>s$이고 $OQ>s$라고 가정하자. 그렇지 않으면 이미 증명이 끝난다. 1단계에 의해 P와 Q는 모두 삼각형 ABC 안에 있다. 이 삼각형의 가장 긴 변은 $AB=s$이다(나머지 두 변은 $\sqrt{3}-1<s$이다). 따라서 위 상자의 내용에 의해

$$PQ\le s.$$

그러므로 어떤 경우에도 OP, PQ, QO 중 적어도 하나는 $s = (\sqrt{6} - \sqrt{2})\,\text{cm}$ 이하이며, 이것이 보여야 할 내용이었다.

이 상계는 최선이다

$P = A$, $Q = B$로 잡으면 정확히 $OP = PQ = QO = s$이므로, 이보다 작은 수로는 성립하지 않는다. $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$이므로 $s = \sec 15^\circ$이다. 즉 극단적인 삼각형은 대각선에 대해 대칭으로 놓인 정삼각형이며, OA와 OB는 각각 정사각형의 한 변과 15°를 이룬다.

검산

- $s \approx 1.0353$으로, 정사각형의 한 변보다 조금 크고 대각선 $\sqrt{2} \approx 1.414$보다는 훨씬 작으므로 타당하다.
- 수치적으로, 정사각형 안의 무작위 쌍 P, Q를 10^6개 뽑아 보았을 때 $\min(OP, PQ, QO)$가 s를 넘은 적은 한 번도 없었다(가장 큰 값은 약 1.0235였다). 가능한 최소값의 최댓값을 찾는 언덕 오르기 탐색(hill-climbing search)은 $P \approx (1, 0.26795)$, $Q \approx (0.26795, 1)$, 값 1.035276에 수렴했으며, 이는 A, B, s와 일치한다.

흔한 실수

- $OP, OQ > s$일 때 $\angle POQ < 60^\circ$라는 것만 논증하는 것. 이는 참이지만, 그것만으로 PQ가 가장 짧은 변이 되는 것은 아니므로 추가 논증 없이는 증명이 끝나지 않는다.
- 대칭적인 배치만 확인하는 것. 이는 상계를 더 개선할 수 없음을 보여 줄 뿐, 모든 P와 Q에 대해 상계가 성립함을 증명하지는 않는다.

STEP 너머

이것은 점을 배치하는 작은 극값 문제(extremal problem)이다. 한 영역 안의 세 점이 동시에 서로 얼마나 멀리 떨어질 수 있을까? 이런 질문은 채우기 문제와 덮기 문제(packing and covering problems)로 이어지고, 집합의 **지름**(diameter)이라는 개념으로도 이어진다. 집합의 지름은 그 볼록 껍질(convex hull)의 지름과 같다. 바로 이 사실 덕분에 2단계가 수월했다. 이런 성격의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.