풀이

STEP I 1988, 문제 2

순수수학 • 정류점

> **STEP I 1988, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q2

핵심 아이디어

g를 합성(composition)으로 보자. 즉 $h(t) = t + 1/t$에 대하여 $\mathrm{g} = h \circ \mathrm{f}$이다. 그러면 연쇄법칙(chain rule)에 의해 g′는 $\mathrm{f}' = 0$인 곳 또는 $h'(\mathrm{f}) = 0$인 곳, 즉 $\mathrm{f} = \pm 1$인 곳에서 0이 된다. $\cos 2x$를 $\sin x$로 나타내면 f는 $\sin x$에 대한 이차식이 되고, 이로부터 f의 크기와 모양을 모두 알 수 있다.

풀이

도함수

$\mathrm{g} = \mathrm{f} + \mathrm{f}^{-1}$을 연쇄법칙으로 미분하면

$$\mathrm{g}'(x) = \mathrm{f}'(x) - \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)^2} = \mathrm{f}'(x)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{f}(x)^2}\right).$$

이를 곱의 미분법(product rule)으로 한 번 더 미분하고, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\mathrm{f}^{-2}) = 2\mathrm{f}^{-3}\mathrm{f}'$를 이용하면

$$\mathrm{g}''(x) = \mathrm{f}''(x)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{f}(x)^2}\right) + \frac{2\,\mathrm{f}'(x)^2}{\mathrm{f}(x)^3}.$$

f의 크기

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$를 이용하고 $s = \sin x$로 놓으면

$$\mathrm{f}(x) = 5 + 2s - 2s^2 = \tfrac{11}{2} - 2\left(s - \tfrac{1}{2}\right)^2.$$

s가 $[-1,1]$ 전체를 움직일 때, 이 식은 $s=\frac{1}{2}$에서 가장 크고($\frac{11}{2}$), 구간의 양 끝 중 $\frac{1}{2}$에서 더 먼 쪽, 즉 $s=-1$에서 가장 작으며 그 값은 1이다. 따라서

$$1 \le \mathrm{f}(x) \le \tfrac{11}{2} \quad \text{모든} x$$

이고, $\mathrm{f}(x)=1$인 것은 $\sin x=-1$일 때뿐이다. 특히 f는 결코 0이 되지 않으므로 g는 모든 곳에서 정의된다.

정류점

$\mathrm{g}'(x)=0$인 것은 정확히 $\mathrm{f}'(x)=0$이거나 $\mathrm{f}(x)^2=1$일 때이다.

f′의 영점.

$$\mathrm{f}'(x) = -2\sin 2x + 2\cos x = 2\cos x\,(1-2\sin x)$$

이므로, 이는 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$일 때 0이 된다. $[0,2\pi]$에서는

$$x = \tfrac{\pi}{6},\ \tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{5\pi}{6},\ \tfrac{3\pi}{2}$$

이다.

$\mathrm{f}=\pm 1$인 점. $\mathrm{f}\ge 1$이므로 이는 $\mathrm{f}=1$, 즉 $\sin x=-1$, 즉 $x=\frac{3\pi}{2}$를 뜻하며, 이 점은 이미 위의 목록에 있다.

따라서 g는 $[0,2\pi]$에서 정확히 네 개의 정류점(stationary point)을 갖는다. (양 끝점은 여기에 포함되지 않는다. $\mathrm{g}'(0)=\mathrm{g}'(2\pi)=2\cdot\frac{24}{25}\neq 0$이기 때문이다.)

정류점의 분류

$\mathrm{f}''(x) = -4\cos 2x - 2\sin x$이다. 각 정류점에서 $\mathrm{f}'=0$이므로 g″의 둘째 항은 사라지고 $\mathrm{g}''=\mathrm{f}''\,(1-\mathrm{f}^{-2})$가 된다.

- $x=\frac{\pi}{6}$과 $x=\frac{5\pi}{6}$: 이때 $\sin x=\frac{1}{2}$, $\cos 2x=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{f}=\frac{11}{2}$이고 $\mathrm{f}''=-2-1=-3$이다. 그러면 $\mathrm{g}''=-3\big(1-\frac{4}{121}\big)<0$이므로 두 점 모두 **극대**이고, 그 값은

  $$\mathrm{g} = \tfrac{11}{2} + \tfrac{2}{11} = \tfrac{125}{22}$$

  이다.

- $x=\frac{\pi}{2}$: 이때 $\sin x=1$, $\cos 2x=-1$이므로 $\mathrm{f}=5$이고 $\mathrm{f}''=4-2=2$이다. 그러면 $\mathrm{g}''=2\big(1-\frac{1}{25}\big)=\frac{48}{25}>0$이므로 **극소**이고, 그 값은 $\mathrm{g}=5+\frac{1}{5}=\frac{26}{5}$이다.

- $x=\frac{3\pi}{2}$: 이때 $\mathrm{f}=1$이므로 $1-\mathrm{f}^{-2}=0$이고, 또한 $\mathrm{f}'=0$이다. 따라서 $\mathrm{g}''=0$이다.

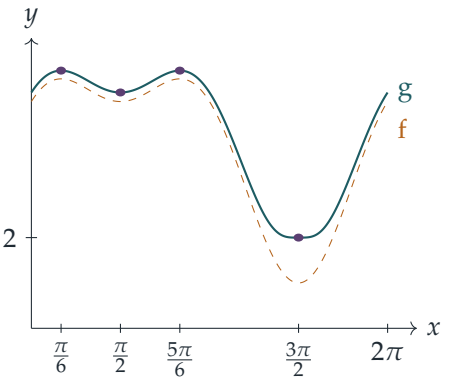
생각해 보기 $x = \frac{3\pi}{2}$에서는 이계도함수 판정법(second-derivative test)이 통하지 않는다. 다른 방법으로는 어떻게 판단할 수 있을까?

$h(t) = t + 1/t$로 돌아가 보자. $t > 0$일 때

$$t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0$$

이고, 등호는 $t = 1$일 때만 성립한다. $\mathrm{f} > 0$이므로 이로부터 모든 x에 대하여 $\mathrm{g}(x) \geq 2$이고, 등호는 정확히 $\mathrm{f}(x) = 1$일 때 성립한다. $x = \frac{3\pi}{2}$에서 $\mathrm{g} = 2$이므로 이 점은 **극소**이다(사실 g의 전역 최솟값(global minimum)이다).

요약. $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$에서 극대(값 $\frac{125}{22}$), $x = \frac{\pi}{2}$(값 $\frac{26}{5}$)와 $x = \frac{3\pi}{2}$(값 2)에서 극소이다.



검산

- h는 $t > 1$에서 증가하므로, $\mathrm{f} > 1$인 곳에서는 g가 f와 함께 증가하고 감소해야 한다. 그래프를 보면 실제로 f(점선)와 g의 꺾이는 점이 같다.
- 수치로 계산하면 $\mathrm{g}(\frac{\pi}{6}) \approx 5.6818 = \frac{125}{22}$이고 $\mathrm{g}(\frac{\pi}{2}) = 5.2$이다. $[0, 2\pi]$에서 g를 촘촘하게 조사하면 꺾이는 점은 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$에서만 나타나고, 최솟값은 2.000이다.
- g''의 공식은 임의의 점에서 유한 차분(finite difference)으로 구한 이계도함수와 일치한다.

흔한 실수

- 인수 $1 - \mathrm{f}^{-2}$를 빠뜨리는 것. 이 문제에서는 이 인수가 새로운 정류점을 만들지 않지만, 그것은 $\mathrm{f} = 1$인 곳이 마침 $\mathrm{f}' = 0$인 곳이기 때문일 뿐이다. 그래도 반드시 확인해야 한다.

- $g''(\frac{3\pi}{2}) = 0$으로부터 이 점이 변곡점(point of inflection)이라고 결론짓는 것. 이계도함수가 0이라는 사실만으로는 아무것도 알 수 없다.

STEP 너머

퇴화된 점 $x = \frac{3\pi}{2}$는 합성함수에서 흔히 나타난다. f가 극소인 곳에서 h도 극소이면 $h \circ f$는 그곳에서 더 "평평"해지고, 이계도함수가 0이 된다. 대학의 해석학에서는 이계도함수 판정법 대신 처음으로 0이 아닌 도함수를 보고 이런 점을 분류하는 테일러(Taylor) 정리(Taylor's theorem)를 쓰거나, (우리가 한 것처럼) 부등식을 직접 이용한다. 평균값 정리(mean value theorem)와 테일러 정리가 꼼꼼하게 전개되는 과정을 보려면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 좋다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.