풀이

STEP I 1988, 문제 13

역학 • 탄성 끈과 충돌

> **STEP I 1988, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q13

핵심 아이디어

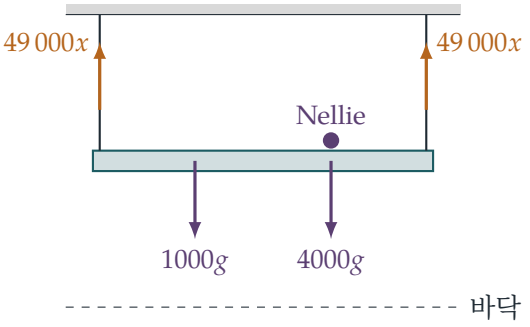
이 문제는 세 단계로 나뉘며, 단계마다 적용되는 보존 법칙(conservation law)이 다르다. Nellie가 판자에 내려앉는 것은 순간적인 비탄성 충돌(inelastic collision)이므로 운동량(momentum)은 보존되지만 에너지는 보존되지 않는다. 판자가 바닥까지 내려가는 동안에는 중력과 탄성 밧줄만 작용하므로 에너지가 보존된다. Nellie가 내려간 뒤에도 다시 에너지가 보존되며, 이때는 저장된 탄성 에너지(elastic energy)가 판자를 밧줄이 자연 길이(natural length)가 되는 지점 너머까지 들어 올리기에 충분한지를 따져야 한다.

풀이

판자는 수평을 유지하는 강체(rigid body)로 모형화하므로, 연직 방향으로 움직이는 질량 1000 kg의 질점(particle)으로 다룰 수 있다. Nellie는 질량 4000 kg의 질점이고, 밧줄은 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 탄성 줄이다. 두 밧줄의 늘어난 길이(extension)는 항상 같은 값 x이므로, 두 밧줄이 함께 작용하는 위쪽 방향의 힘은

$$2 \cdot \frac{490\,000}{10}\, x = 98\,000\, x \text{ N}.$$

이다. 따라서 두 밧줄은 강성(stiffness)이 $K = 98\,000 \text{ N m}^{-1}$인 하나의 용수철처럼 작용하며, 그 탄성 에너지는 $\frac{1}{2}Kx^2 = 49\,000\, x^2$ J이다.



처음 위치

Nellie가 오기 전에 판자는 평형(equilibrium) 상태로 매달려 있으므로, 늘어난 길이 e_0은

$$98\,000\,e_0 = 1000 \times 9.8 \quad \Longrightarrow \quad e_0 = 0.1 \text{ m}.$$

를 만족한다.

착지

Nellie는 판자에 내려앉은 뒤 그대로 머무르므로, 이것은 완전 비탄성 충돌(perfectly inelastic collision)이다. 충돌은 매우 짧은 시간 동안 일어나고, 밧줄의 장력(tension)과 무게는 유한한 힘이므로 충돌하는 동안 이들이 주는 충격량(impulse)은 무시할 수 있다. 따라서 운동량이 보존되고, 충돌 직후의 공통 속력 v는

$$4000 \times 5 = 5000\,v \quad \Longrightarrow \quad v = 4 \text{ m s}^{-1}.$$

를 만족한다.

생각해 보기 Nellie가 도착하는 순간부터 곧바로 에너지 보존을 쓸 수 있을까?

그럴 수 없다. 코끼리가 판자에 내려앉아 그대로 머무르면 많은 운동 에너지가 열과 소리로 바뀐다. 여기서는 $\frac{1}{2} \cdot 4000 \cdot 5^2 = 50\,000$ J가 $\frac{1}{2} \cdot 5000 \cdot 4^2 = 40\,000$ J로 바뀌므로 10 000 J를 잃는다. 에너지는 착지 직후의 순간부터만 보존된다.

하강

판자의 처음 높이를 바닥으로부터 h라 하자. 판자와 Nellie(전체 질량 5000 kg)는 속력 4 m s^{-1}로 출발하여 거리 h만큼 아래인 바닥에서 정지하며, 이때 늘어난 길이는 $0.1 + h$이

다. 일을 하는 힘은 중력과 밧줄의 힘뿐이므로

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot 5000\cdot 4^2}_{\text{잃은 운동 에너지}} + \underbrace{5000\cdot 9.8\,h}_{\text{잃은 중력 위치 에너지}} = \underbrace{49\,000[(0.1+h)^2-0.1^2]}_{\text{얻은 탄성 에너지}},$$

$$40\,000 + 49\,000\,h = 49\,000\,(0.2h + h^2).$$

이다. 양변을 49 000으로 나누고 정리하면

$$h^2 - 0.8\,h - \tfrac{40}{49} = 0, \qquad \text{이므로} \qquad h = 0.4 + \sqrt{0.16 + \tfrac{40}{49}} = \frac{14+2\sqrt{299}}{35},$$

이다. 여기서 $h > 0$이므로 양의 근을 택하였다. 따라서

$$h \approx 1.39\ \text{m}.$$

이다. 판자가 내려갈수록 늘어난 길이는 커지기만 하므로, 이 단계 내내 밧줄은 팽팽하게 유지된다.

Nellie가 내린 뒤

Nellie는 조심스럽게 내려가므로, 판자만(1000 kg) 바닥에서 정지해 있고 이때 늘어난 길이는

$$X = 0.1 + h \approx 1.488\ \text{m}.$$

이다. 판자가 충분히 올라가서 늘어난 길이가 0이 되면, 즉 높이 X만큼 올라가면 밧줄은 느슨해진다(slack). 밧줄이 팽팽한 동안에는 에너지가 보존되므로, 저장된 탄성 에너지가 위치 에너지의 증가량보다 크면 판자는 그 높이에 도달한다.

$$\tfrac{1}{2}KX^2 = 49\,000\,X^2 \approx 108\,500\ \text{J}, \qquad 1000\cdot 9.8\cdot X \approx 14\,600\ \text{J}.$$

앞의 값이 훨씬 크므로, 판자는 밧줄이 자연 길이가 되는 위치에 도달했을 때에도 여전히 위로 움직이고 있으며, 그때의 운동 에너지는 약 93 900 J(속력 약 $13.7\,\text{m s}^{-1}$)이다. 이 지점보다 위에서는 밧줄이 자연 길이보다 짧아져야 하므로, 밧줄은 느슨해진다. **그렇다, 밧줄은 느슨해진다.**

? **생각해 보기** 그냥 단진동을 이용하면 안 될까?

밧줄이 팽팽한 동안에는 이용할 수 있다. 판자만 남으면 판자는 평형 상태의 늘어난 길이 0.1 m를 중심으로 단진동(simple harmonic motion)을 하고, 그보다 $h \approx 1.39$ m 아래에서 출발하므로 진폭(amplitude)은 1.39 m이다. 진동의 최고점에서 늘어난 길이는 $0.1 - 1.39 < 0$이 되는데, 이는 팽팽한 밧줄에서는 불가능하다. 따라서 판자가 최고점에 이르기 전에 밧줄은 반드시 느슨해진다. (실제로 단진동을 이용한 논증은 $h > 0.1$이기만 하면 바로 답을 준다.)

밧줄이 느슨해지면 판자는 중력만 받으며 자유롭게 움직여 $13.7^2/(2\times 9.8)\approx 9.6\,\mathrm{m}$만큼 더 올라간다. 이는 $10\,\mathrm{m}$보다 작으므로, 판자는 (아슬아슬하게!) 밧줄이 고정된 지점에 닿지 않고 다시 떨어진다.

검산

- 에너지 방정식에 $h=1.3881$을 대입하면 양변이 모두 가장 가까운 줄 단위로 $108\,017\,\mathrm{J}$이다.
- $x=0.1$, $\dot{x}=4$에서 시작하여 $\ddot{x}=g-Kx/5000$을 수치적으로 단계별 계산하면, 판자는 $1.3881\,\mathrm{m}$ 내려간 뒤 멈춘다.
- Nellie가 떠난 뒤 판자의 운동을 단계별로 계산하면, 판자가 $13.7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 위로 움직이는 동안 늘어난 길이가 0이 되고, 최고점은 바닥에서 $11.07\,\mathrm{m}$ 위로 $X+9.58$과 일치한다.
- 단위: $490\,000\,\mathrm{N}$ / $10\,\mathrm{m}$는 $\mathrm{N\,m^{-1}}$이므로, 에너지 방정식의 모든 항의 단위는 줄이다.

흔한 실수

- 착지 과정에서도 에너지 보존을 적용하는 것. 이렇게 하면 합쳐진 속력이 $4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 대신 $\sqrt{20}\approx 4.47\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 나온다.
- 탄성 에너지를 자연 길이로부터 재면서 처음 늘어난 길이 $0.1\,\mathrm{m}$를 잊는 것. 얻은 에너지는 $49\,000\,h^2$이 아니라 $49\,000[(0.1+h)^2-0.1^2]$이다.
- 두 밧줄이 아니라 밧줄 하나의 강성을 쓰는 것.

STEP 너머

두 밧줄은 비선형 용수철(nonlinear spring)이다. 늘어나면 잡아당기지만 압축되면 밀어낼 수 없다. 이처럼 서로 다른 운동 방정식 사이를 오가는 계를 구간별 선형(piecewise-linear) 진동자 또는 "충돌(impact)" 진동자라고 하며, 단순한 것조차 놀라울 만큼 복잡하게 행동할 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 문제 전체의 바탕이 되는 에너지, 충돌, 진동을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.