풀이

STEP I 1988, 문제 12

역학 • 가변적인 힘에 의한 운동

> **STEP I 1988, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q12

핵심 아이디어

각 방법에 대해 스케이터가 둑 쪽으로 가장 멀리 나아가는 거리를 구한다. 적어도 한 방법에서 d가 그 거리보다 클 때, 그리고 그때에만 그녀는 안전하다. 방향을 트는 것은 전형적인 원운동(circular motion)이다. 속도에 수직인 일정한 크기의 힘은 반지름이 일정한 원운동을 만들고, 그 반지름이 바로 그녀가 앞으로 더 나아가는 거리이다. 제동은 힘이 속력에 따라 달라지는 변력 문제인데, 우리가 원하는 것은 거리이므로 가속도를 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰라는 신호이다.

풀이

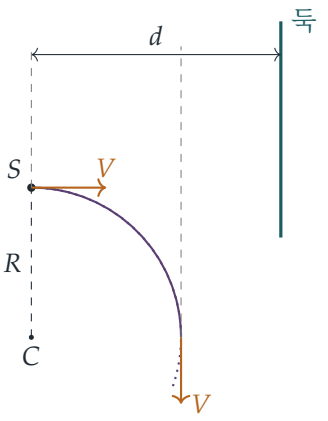
모형

스케이터를 매끄러운 수평 얼음 위에 있는 질량 M인 질점(particle)으로 본다. 그녀에게 작용하는 수평 방향의 힘은 그녀 자신이 가하는 힘뿐이다. 무게와 수직항력(normal reaction)은 서로 상쇄되므로 이후로는 아무 역할도 하지 않는다. 출발점에서 둑 쪽으로 잰 거리를 x라 하면 둑은 $x = d$에 있다.

방법 1: 원을 그리며 방향 틀기

속도에 수직인 힘은 일을 하지 않으므로 그녀의 속력은 V로 유지된다. 일정한 속력 V의 속도에 항상 수직으로 작용하는 일정한 크기 F의 힘은 반지름 R인 원운동의 구심력(centripetal force)이 되며, 이때

$$F = \frac{MV^2}{R}, \qquad \text{따라서} \qquad R = \frac{MV^2}{F}.$$



그녀는 S에서 둑을 향해 똑바로 움직이며 출발하므로, 원의 중심 C는 S를 지나고 둑과 **평행한** 직선 위에, S로부터 거리 R인 곳에 있다. 각 θ만큼 돌았을 때 둑 쪽으로 나아간 거리는 $x = R\sin\theta$이고, 이것은 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 최댓값 R을 가진다. 그 지점에서 그녀는 둑과 평행하게 움직이며, 그 뒤로는 둑에서 멀어지는 쪽으로 휘어 간다. 따라서

$$d > \frac{MV^2}{F}.$$

이면 그녀는 둑에 부딪히지 않는다. (정확히 $d = MV^2/F$이면 그녀는 둑을 따라 움직이며 둑에 살짝 스친다.)

방법 2: 제동

이번에는 힘이 운동 방향의 정반대로 작용하므로, 그녀는 둑을 향해 직선으로 움직이며 느려진다. 시간이 아니라 거리를 구하고자 하므로 가속도를 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰면, 뉴턴(Newton)의 제2법칙(Newton's second law)에 의해

$$Mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{F(V^2+v^2)}{2V^2}.$$

변수를 분리(separating the variables)하여 $v = V$인 $x = 0$부터 그녀가 멈추는 지점 $x = X$까지 적분하면

$$\int_V^0 \frac{v}{V^2+v^2}\,\mathrm{d}v = -\frac{F}{2MV^2}\int_0^X \mathrm{d}x,$$
$$\left[\tfrac{1}{2}\ln(V^2+v^2)\right]_V^0 = -\frac{FX}{2MV^2},$$
$$\tfrac{1}{2}\ln\frac{V^2}{2V^2} = -\tfrac{1}{2}\ln 2 = -\frac{FX}{2MV^2},$$

이므로 정지 거리(stopping distance)는

$$X = \frac{MV^2}{F}\ln 2.$$

생각해 보기 그녀는 실제로 정지하는가, 아니면 영원히 조금씩 앞으로 나아가면서 속력이 0에 가까워지기만 하는가?

제동력은 결코 $\frac{1}{2}F$ 아래로 떨어지지 않으므로, 그녀의 속력은 유한한 시간 안에 0이 된다. 구체적으로 $M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{F}{2V^2}(V^2+v^2)$를 적분하면 $\frac{2MV}{F}(\arctan 1 - \arctan\frac{v}{V}) = t$이므로, 그녀는 유한한 거리 X를 간 뒤 $t = \pi MV/(2F)$에 멈춘다. (정지한 뒤에는 더 이상 힘을 가하지 않는다.) 따라서 $d > X$이면 제동으로 살아남는다. $d = X$이면 그녀는 속력 0으로 둑에 도달하여 아무 충격 없이 둑에 닿는다.

두 방법 비교

$\ln 2 \approx 0.693 < 1$이므로 정지 거리는 회전 반지름보다 짧다. 즉 제동이 더 나은 방법이며, 방향 틀기가 통하는 경우에는 언제나 제동도 통한다. 따라서 그녀가 둑에 부딪히지 않을 수 있을 필요충분조건은

$$\boxed{d > \frac{MV^2}{F}\ln 2}$$

이다. ($d = \frac{MV^2}{F}\ln 2$는 그녀가 정지한 상태로 둑에 도달하는 경계의 경우이다.)

질점 가정

실제 스케이터는 크기가 있다. 몸과 팔이 질량중심보다 어느 정도 앞으로 뻗어 있으므로, 실제로는 d가 위의 값보다 대략 그만큼 더 커야 한다. 더 중요한 점은 힘이 얼음 위의 스케이트 날에서 나온다는 것이다. 방향을 틀려면 곡선 안쪽으로 몸을 기울여야 하고, 세게 제동하려면 날을 운동 방향에 가로질러 비틀어야 하는데(하키 스톱), 그러면 몸이 옆으로 돌아간다. 이런 회전과 자세야말로 질점 모형이 무시하는 것들이다. 또한 이 모형은 얼음이 매끄럽다고 하면서도 얼음이 이런 힘을 제공할 수 있다고 슬며시 가정한다. 날을 따르는 방향으로는 마찰이 없어도 날은 옆 방향으로는 얼음을 붙잡는다.

검산

- 단위: MV^2/F는 $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}/N} = \mathrm{m}$로, 당연히 그래야 하듯 길이이다.
- 범위: 제동력은 $\frac{1}{2}F$와 F 사이에 있다. 일정한 힘 F라면 $MV^2/(2F)$에서, 일정한 힘 $\frac{1}{2}F$라면 MV^2/F에서 멈출 것이고, 실제로 $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$이다.
- 수치 확인: 임의의 M, V, F(예를 들어 $R = MV^2/F = 7.0747$)에 대해 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 적분기로 두 운동을 단계별로 계산하면, 방향 틀기에서는 최대 전진 거리 7.0747, 제동에서는 정지 거리 $4.9038 = R\ln 2$와 정지 시간 $\pi MV/(2F)$를 얻었다.

흔한 실수

- 원의 중심을 그녀 옆에 두어 도달 거리를 R로 얻는 대신, 중심을 운동 직선 위(또는 둑 위)에 두어 도달 거리를 $2R$나 0으로 얻는 것.
- 제동에 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$를 써서 거리를 구하느라 고생하는 것. $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$를 쓰면 한 번의 적분으로 거리가 나온다.
- 두 조건을 비교하지 않고 따로따로 제시하는 것. 문제는 그녀가 탈출할 **수 있는** d의 집합을 묻고 있으므로, 두 방법 중 더 나은 쪽이 필요하다.

STEP 너머

$\ddot{x} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰는 것은 에너지 방법으로 가는 첫걸음이다. 위치에만 의존하는 힘에 대해 이것은 일-에너지 정리(work–energy theorem)이며, 대학 역학에서는 퍼텐셜(potential)과 운동의 위상 평면(phase plane) 그림으로 발전한다. 방향 틀기와 제동 사이에서 스케이터가 하는 선택은 간단한 최적 제어(optimal control) 문제이기도 하다. 제한된 힘을 써서 장애물을 피하는 가장 좋은 방법은 무엇인가? Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 속도에 의존하는 힘과 원운동을 바로 다음 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.