풀이

STEP I 1988, 문제 11

역학 • 질량중심

> **STEP I 1988, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q11

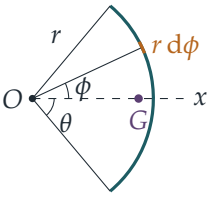
핵심 아이디어

호(arc)의 경우, 대칭성에 의해 질량중심(centre of mass)은 호를 이등분하는 반지름(bisecting radius) 위에 있고, 각에 대한 적분 하나로 중심으로부터의 거리를 구할 수 있다. 틀(framework)의 경우, 놀라운 사실은 이 틀이 반원 위의 **모든** 점에서 균형을 이룬다는 것이다. 바닥의 반작용(reaction)은 항상 반원의 반지름을 따라 작용하고, 그 모든 반지름 위에 놓인 점은 중심뿐이다. 따라서 틀 전체의 질량중심은 반원의 중심이어야 하고, 그 점에 대한 모멘트(moment)를 취하면 h에 대한 방정식을 얻는다.

풀이

균일한 호

호의 중심을 O, 단위 길이당 밀도(density)를 ρ라 하자. 각 ϕ를 이등분 반지름으로부터 재어, 호가 $-\theta \le \phi \le \theta$가 되도록 한다. x축을 이등분선을 따라 잡는다. 이 축에 대한 대칭성에 의해 질량중심은 이 축 위에 있으므로, $\bar{x}$만 구하면 된다.



ϕ와 $\phi + \mathrm{d}\phi$ 사이의 미소 부분은 길이가 $r\,\mathrm{d}\phi$이므로 질량은 $\rho r\,\mathrm{d}\phi$이고, 그 x좌표는 $r\cos\phi$이

다. 전체 질량은 $\rho r \cdot 2\theta$이다. 따라서

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\theta}^{\theta} r\cos\phi \; \rho r \, \mathrm{d}\phi}{2\rho r\theta} = \frac{r[\sin\phi]_{-\theta}^{\theta}}{2\theta} = \frac{r\sin\theta}{\theta}.$$

즉 질량중심은 이등분 반지름 위에 있으며, 중심으로부터의 거리는

$$\boxed{\bar{x} = \frac{r\sin\theta}{\theta}}$$

이다. 반원호의 경우 $\theta = \frac{\pi}{2}$이고 이 값은 $\frac{2r}{\pi}$가 되는데, 이것이 다음에 필요한 경우이다.

틀: 질량중심은 어디에 있어야 하는가?

틀은 강체(rigid)이며 단위 길이당 밀도가 ρ로 같은 균일하고 가는 막대들로 이루어져 있고, 바닥은 수평이라고 모형화한다. O를 반원의 중심, 즉 직사각형 아랫변의 중점이라 하자.

> **생각해 보기** 왜 "반원 위의 어느 점에서든 평형"이라는 조건이 질량중심을 완전히 결정하는가?

틀이 반원 위의 점 P를 바닥에 대고 놓여 있다고 하자. 바닥은 P에서 반원에 접하므로, P를 지나는 연직선은 그 접선(tangent)에 수직이다. 즉 그것은 반지름 직선 OP이다. 작용하는 힘은 질량중심 G에 작용하는 무게와 P에서의 반작용, 이렇게 두 가지뿐이다. 평형(equilibrium)을 이루려면 두 힘은 같은 직선을 따라 작용해야 하므로, G는 P를 지나는 연직선, 곧 직선 OP 위에 있다. 이는 반원 위의 모든 P에 대해 성립한다. 서로 다른 두 점 P는 O를 지나는 서로 다른 두 직선을 주고, 이 두 직선은 O에서만 만난다. 따라서 $G = O$이다.

역으로, $G = O$이면 모든 P에 대해 무게가 OP를 따라, 곧바로 접점을 지나도록 작용하므로, 틀은 바닥의 어느 곳에 닿든 평형을 이룬다. 따라서 이 조건은 정확히 "G가 O에 있다"는 것과 같다.

아랫변에 대한 모멘트

아랫변이 놓인 직선에 대한 모멘트를 취하고, 높이는 O로부터 위쪽으로 잰다(따라서 반원은 이 직선 아래에 있다). 각 부분은 다음과 같다.

부분	질량	질량중심의 높이	모멘트
윗변 막대	$2r\rho$	$2h$	$4rh\rho$
양 옆 막대 두 개	$2 \times 2h\rho$	h	$4h^2\rho$
아랫변 막대	$2r\rho$	0	0
반원	$\pi r\rho$	$-\frac{2r}{\pi}$	$-2r^2\rho$

반원의 질량중심은 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때의 호 공식에서 얻으며, O보다 **아래**에 있다. G의 높이가 0이므로 전체 모멘트를 0으로 놓고 2ρ로 나누면

$$2h^2 + 2rh - r^2 = 0.$$

이것은 h에 대한 이차방정식(quadratic)이고, 그 근은

$$h = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 + 8r^2}}{4} = \frac{(-1 \pm \sqrt{3})\, r}{2}.$$

$h > 0$이므로 양의 근을 택한다.

$$\boxed{h = \frac{(\sqrt{3} - 1)\, r}{2} \approx 0.366\, r}$$

아랫변 막대는 자기 자신이 놓인 직선에 대해 모멘트가 0임에 주목하자. 틀이 이 막대를 포함하든 포함하지 않든 답은 같으므로, 그림을 조금 다르게 해석하더라도 문제가 되지 않는다.

검산

- $\theta \to 0$일 때 $\frac{r\sin\theta}{\theta} \to r$이다. 즉 아주 짧은 호는 질량중심이 호 자체 위에 있다. 원 전체, 즉 $\theta = \pi$일 때는 0, 곧 중심이 나오며, 이는 대칭성이 요구하는 바와 같다.
- $h = \frac{(\sqrt{3}-1)r}{2}$일 때 $2h^2 = (2 - \sqrt{3})r^2$이고 $2rh = (\sqrt{3} - 1)r^2$이며, 이 둘을 더하면 요구대로 r^2이 된다.
- 모든 막대를 20 000개의 조각으로 나누어 질량중심을 수치적으로 계산하였다. $r = 1$, $h \approx 0.36603$일 때 질량중심은 O로부터 10^{-9} 이내에 있다. h를 10% 늘리면 질량중심이 약 0.03만큼 위로 올라가므로, 틀은 더 이상 균형을 이루지 못한다.

흔한 실수

- 반원 **철사**에 대한 $\frac{2r}{\pi}$ 대신 반원 **박판**(lamina)에 대한 $\frac{4r}{3\pi}$를 사용하는 것.
- 길이가 아니라 각으로 가중치를 주는 것. 미소 부분의 질량은 $\rho r\, \mathrm{d}\phi$이며, 인수 r이 약분되는 것은 전체 질량에도 그것이 나타나기 때문일 뿐이다.
- 이유 없이 G가 O에 있다고 단정하는 것. 근거는 반작용이 항상 반지름을 따라 작용한다는 것이다.

STEP 너머

호에 대한 적분은 곡선을 따라가는 **선적분**(line integral) $\int \mathbf{r}\rho\,ds$로서의 질량중심의 가장 간단한 예이다. 대학 1학년 과정에서는 이중적분(double integral)과 삼중적분(triple integral)을 사용하여 곡면과 입체로 나아가며, 파푸스(Pappus)의 정리는 이러한 질량중심을 회전체의 넓이 및 부피와 연결한다. 균형에 관한 이 논증은 흔들림 안정성(rocking stability)의 바탕이 되는 아이디어이기도 한데, 곡면 위에 놓인 물체는 질량중심이 곡률 중심(centre of curvature)보다 아래에 있으면 안정하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 질량중심과 강체의 평형을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.