풀이

# STEP I 1988, 문제 10

역학 • 포물체 운동

> **STEP I 1988, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q10

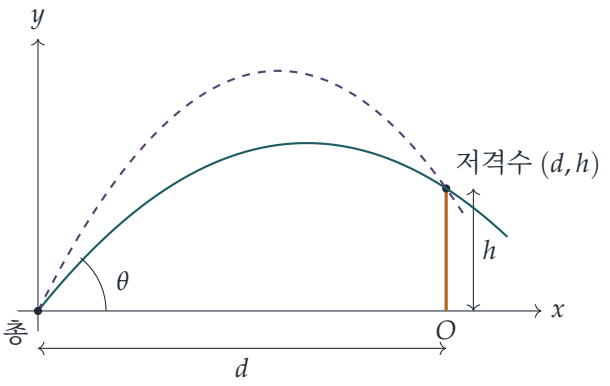
## 핵심 아이디어

질문을 뒤집어 보자. 총이 나무 밑동에서 수평 거리 $d$인 곳에 있다고 두고, 속력 $v$로 발사된 총알이 나무 꼭대기를 지나가게 하는 앙각(angle of elevation)이 **하나라도** 있는지 묻는다. $\tan\theta$로 나타낸 궤적 방정식(trajectory equation)은 $\tan\theta$에 대한 이차방정식이므로, 답이 "그렇다"인 것은 정확히 그 이차방정식이 실근을 가질 때이다. 그러면 판별식(discriminant) 조건은 $d$만에 대한 부등식이 된다.

## 풀이

### 모형

총알을 공기 저항 없이 중력만 받아 움직이는 입자로 보고, 지면 높이에서 속력 $v$로 수평면 위 각 $\theta$ 방향으로 발사된다고 하자. 여기서 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$이다. 총의 위치를 모르므로, 총이 나무의 밑동 $O$에서 거리 $d \geq 0$인 곳에 있다고 하고, 총의 위치를 원점으로 하여 $x$축은 나무를 향하는 수평 방향, $y$축은 연직 위 방향으로 잡는다. 그러면 나무 꼭대기는 점 $(d, h)$이다.




**저격수 맞히기**

시각 $t$에서 총알의 위치는 $x = vt\cos\theta$, $y = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$이다. $\theta < \frac{\pi}{2}$이면 $t = x/(v\cos\theta)$를 소거하고 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$를 이용하여 다음 궤적을 얻는다.

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v^2}(1 + \tan^2\theta).$$

총알이 저격수를 맞히는 것은 $(d, h)$가 이 곡선 위에 있을 때이고, 그때뿐이다. 먼저 $d > 0$이라고 하자. $T = \tan\theta, k = \dfrac{gd^2}{2v^2} > 0$으로 두면 조건은 다음과 같다.

$$kT^2 - dT + (h + k) = 0.$$

모든 실수 $T$는 정확히 하나의 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 대한 $\tan\theta$이다. 그런데 근이 음수일 수도 있을까? 두 근의 곱은 $(h + k)/k > 0$이고 합은 $d/k > 0$이므로, 실근이 있다면 둘 다 양수이고 실제 앙각 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$를 준다. 따라서 가능한 앙각이 존재하는 것은 정확히 이 이차방정식이 실근을 가질 때, 곧 판별식이 음이 아닐 때이다.

$$\begin{aligned} d^2 - 4k(h + k) \geq 0 &\iff d^2 \geq \frac{2gd^2}{v^2}\left(h + \frac{gd^2}{2v^2}\right) \\ &\iff v^4 \geq 2ghv^2 + g^2d^2 \qquad (d^2 > 0\text{으로 나누고 } v^4\text{를 곱함}) \\ &\iff d^2 \leq \frac{v^2}{g^2}(v^2 - 2gh). \end{aligned}$$

**생각해 보기** 총이 나무 밑동 바로 그 자리에 있어서 $d = 0$이고 위의 궤적 방정식을 쓸 수 없다면 어떻게 될까?

그때는 총알이 연직으로($\theta = \frac{\pi}{2}$) 발사되었어야 하고, 나중 속력이 0 이상이라는 조건과 $v^2 = u^2 - 2gs$에 의해 총알이 높이 $h$에 도달하는 것은 $v^2 \geq 2gh$일 때이고 그때뿐이다. 이것은 $d = 0$일 때의 같은 조건이므로, 이 부등식은 모든 경우를 포괄한다.

$d \geq 0$이므로 음이 아닌 제곱근을 취하면 다음을 얻는다.

$$d \leq \frac{v}{g}\sqrt{v^2 - 2gh}.$$

따라서 총은 수평한 지면 위에서 나무 밑동으로부터의 거리가 많아야 $(v/g)\sqrt{v^2-2gh}$인 점에 있었다. 즉 총은 나무 밑동을 중심으로 하고 그 길이를 반지름으로 하는 원의 내부(또는 극단적인 경우 원 위)에 있었고, 이것이 보이려던 것이다. 실제로 발사가 일어났다는 것을 알기 때문에 이 제곱근은 실수이다. $d = 0$일 때 부등식은 $v^2 \geq 2gh$를 강제하는데, 이는 단지 총알이 높이 $h$까지 올라갈 만큼의 에너지를 가진다는 뜻이다.

이 조건은 충분조건이기도 하다. 원 내부의 어느 점에서든 이차방정식은 두 양의 실근을 가지므로 가능한 앙각이 두 개(그림에서처럼 낮은 궤적과 높은 궤적) 있고, 원 위에서는 이 둘이 하나로 합쳐진다.

## 검산

- $h = 0$이면 반지름은 $v^2/g$로, 평지에서의 익숙한 최대 도달 거리(maximum range)이다. $v^2 \to 2gh$이면 반지름은 0으로 줄어든다. 즉 총은 밑동에서 바로 위로 쏘아야만 겨우 저격수에 닿을 수 있다.
- 단위: $(v/g)\sqrt{v^2}$의 단위는 $(\mathrm{m\,s^{-1}})^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}) = \mathrm{m}$이다.
- 수치로 확인하면, $g = 9.8$, $v = 20$, $h = 8$일 때 반지름은 약 31.8 m이다. $d = 31.8\,\mathrm{m}$에서 유일하게 허용되는 앙각 $\tan\theta = v^2/(gd)$로 운동을 단계적으로 진행시키면, 총알은 나무 위치에서 높이 8.000 m에 이른다. 모든 앙각을 훑어보면 원 밖으로 몇 퍼센트 벗어난 점에는 도달할 수 없고 원 안의 점에는 도달할 수 있음이 확인된다.

## 흔한 실수

- 최대 도달 거리 $v^2/g$나 최대 높이만 사용하는 것. 저격수는 높이 $h$에 있으므로 두 좌표가 동시에 중요하다.
- $\tan\theta$에 대한 근이 수평면 위쪽의 앙각을 주는지 확인하지 않거나, 연직 발사 $d = 0$을 무시하는 것.

## STEP 너머

$v$를 고정하면, 총에서 도달할 수 있는 점들은 포물선 $y = \dfrac{v^2}{2g} - \dfrac{gx^2}{2v^2}$ 아래 영역을 채운다. 이 포물선은 궤적들로 이루어진 곡선족의 **포락선**(envelope)으로, "안전 포물선(parabola of

safety)"이라고 부른다. 우리의 판별식 조건은 정확히 $h \leq$ ($x = d$에서의 이 포락선의 값)이라는 것이다. 곡선족의 포락선은 변분법(calculus of variations)과 일계 미분방정식 이론에서 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 문제를 이처럼 세심하게 다루는 다음 단계로 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.