풀이

STEP I 1988, 문제 1

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP I 1988, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q1

핵심 아이디어

방정식 $n^m = m^n$은 밑과 지수 사이에서 변수가 뒤섞여 있어서 다루기 까다롭다. 양변에 로그(logarithm)를 취하면 $m \ln n = n \ln m$이 되고, 이를 mn으로 나누면 두 변수가 완전히 분리된다: $\frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m}$. 따라서 h가 같은 값을 갖는 서로 다른 두 정수를 찾으면 되고, 그래프의 모양을 보면 그런 쌍이 어디에 있을 수 있는지 정확히 알 수 있다.

풀이

h의 그래프

몫의 미분법(quotient rule)으로 미분하면

$$\mathrm{h}'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$x^2 > 0$이므로 $\mathrm{h}'(x)$의 부호는 $1 - \ln x$의 부호와 같다. 따라서 h는 $(0, \mathrm{e})$에서 순증가(strictly increasing)하고 (e, ∞)에서 순감소하며, $x = \mathrm{e}$에서 최댓값

$$\mathrm{h}(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

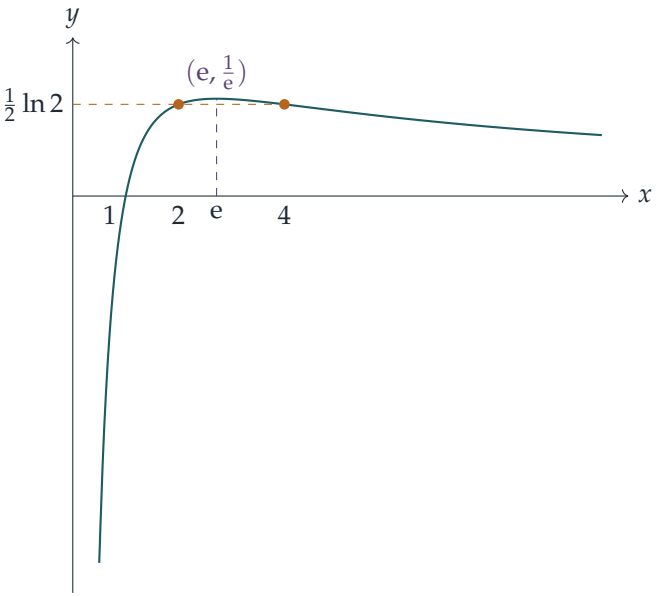
을 갖는다. 한 번 더 미분하면

$$\mathrm{h}''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3},$$

이므로 $x = \mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$에서 변곡점(point of inflection)이 있고, 이때 $\mathrm{h} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3/2} \approx 0.335$이다. 곡선은 이 점의 왼쪽에서 위로 볼록(concave)하고 오른쪽에서 아래로 볼록(convex)하다.

다음으로 양 끝에서의 거동과 부호를 살펴보자.

- $x \to 0^+$일 때 $\ln x \to -\infty$이고 $\frac{1}{x} \to +\infty$이므로 $\mathrm{h}(x) \to -\infty$이다. 즉 y축이 점근선(asymptote)이다.
- $\mathrm{h}(1) = 0$이고, $\mathrm{h}(x)$의 부호는 $\ln x$의 부호와 같다. 즉 $(0,1)$에서 음수이고 $x > 1$에서 양수이다.
- $x \to \infty$일 때 $\frac{\ln x}{x} \to 0$이고(로그는 x의 어떤 양의 거듭제곱보다도 느리게 증가한다), 그 범위에서 $\mathrm{h}(x) > 0$이므로 곡선은 위쪽에서 x축에 가까워진다.



방정식 $n^m = m^n$

m과 n이 양수이므로 양변이 모두 양수이고, 따라서 로그를 취할 수 있다:

$$n^m = m^n \iff m \ln n = n \ln m \iff \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m} \iff \mathrm{h}(n) = \mathrm{h}(m),$$

여기서 가운데 단계에서 $mn > 0$으로 나누었다. 따라서 $\mathrm{h}(m) = \mathrm{h}(n)$을 만족하는 서로 다른 양의 정수를 찾으면 된다. 대칭성에 의해 $m < n$이라고 가정하자.

? **생각해 보기** 그래프에서 서로 다른 두 점의 높이가 같을 수 있는 곳은 어디인가?

h는 $(0, \mathrm{e}]$에서 순증가하고 $[\mathrm{e}, \infty)$에서 순감소하므로, 각 구간에서 일대일(one-to-one)이다. 따라서 함숫값이 같은 서로 다른 두 입력값은 e의 서로 반대쪽에 있어야 한다: $m < \mathrm{e} < n$. m은 양의 정수이고 $\mathrm{e} \approx 2.718$이므로 $m = 1$ 또는 $m = 2$이다.

- $m = 1$이면 $\mathrm{h}(n) = \mathrm{h}(1) = 0$이므로 $\ln n = 0$이어야 하고, 따라서 $n = 1 = m$이 되어 조건에 맞지 않는다. (직접 보면: $n^1 = 1^n$에서 $n = 1$이다.)
- $m = 2$이면 $\mathrm{h}(n) = \frac{1}{2}\ln 2$를 만족하는 정수 $n \geq 3$이 필요하다. 그런데 $n = 4$가 성립한다. 왜냐하면
$$\mathrm{h}(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2} = \mathrm{h}(2),$$
즉 $4^2 = 16 = 2^4$이기 때문이다. h는 $[\mathrm{e}, \infty)$에서 순감소하므로 그 구간에서 값 $\frac{1}{2}\ln 2$를 많아야 한 번 가진다. 따라서 가능한 것은 $n = 4$뿐이다.

그러므로 $n^m = m^n$을 만족하는 서로 다른 양의 정수의 쌍은

$$(m, n) = (2, 4) \quad \text{그리고} \quad (m, n) = (4, 2).$$

뿐이다.

검산

$1 \leq m, n \leq 300$인 모든 경우를 정확한 정수 연산으로 컴퓨터 탐색해 보면 $(2, 4)$와 $(4, 2)$만 나온다. 수치적으로 $\mathrm{h}(2) = \mathrm{h}(4) = 0.346574\ldots$이고, 그래프에서 보이듯이 최댓값 $1/\mathrm{e} = 0.367879\ldots$보다 조금 작다. $\mathrm{h}(3)$에서 해가 나오지 않는 이유도 알 수 있다. $\mathrm{h}(3) \approx 0.366$은 $\mathrm{h}(2)$보다 크므로, e의 왼쪽에 있는 짝은 2와 e 사이에 엄격하게 놓이고, 따라서 정수가 아니다.

흔한 실수

- 시행착오로 $(2, 4)$를 찾고 거기서 멈추는 것. 문제는 **모든** 쌍을 묻고 있으므로, 다른 쌍이 없음을 증명하는 단조성(monotonicity) 논증이 답의 핵심이다.
- 그래프 개형에서 점근적 거동을 빠뜨리는 것. 곡선은 y축 근처에서 $-\infty$로 곤두박질치지만, $x \to \infty$일 때는 0을 향해 천천히 다가갈 뿐 다시는 축을 가로지르지 않는다.

STEP 너머

실수까지 허용하면, $(1, \mathrm{e})$의 모든 a에 대해 $a^b = b^a$를 만족하는 짝 $b > \mathrm{e}$가 정확히 하나 존재하며, 이러한 쌍은 $t > 0$에 대해 $a = (1 + \frac{1}{t})^t$, $b = (1 + \frac{1}{t})^{t+1}$로 깔끔하게 매개화(parametrise)할 수 있다. $t \to \infty$이면 둘 다 e로 수렴하는데, 이것이 그래프 꼭대기에서 두 값이 만나는 점이다. 우리가 사용한 극한 $\frac{\ln x}{x} \to 0$은 증가 속도를 비교하는 첫 번째 예로, 대학의 첫 해석학(analysis) 과목에서 엄밀하게 다룬다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.