풀이

STEP III 1987, 문제 9

순수수학 • 군의 직적

> **STEP III 1987, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q9

핵심 아이디어

$G \times H$에서 일어나는 모든 일은 좌표마다 따로 일어나므로, 각 군 공리(group axiom)와 $G \times H$의 각 성질은 G와 H 각각의 같은 성질로 귀결된다. 참/거짓을 판단하는 부분에서 "참"이라면 일반적인 증명이 필요하고, "거짓"이라면 확실한 반례 하나면 충분하다. 동형(isomorphic)인 군들은 곱셈만으로 기술할 수 있는 모든 것, 예를 들어 크기나 원소의 위수(order)가 서로 같다. 그러므로 이런 것들을 비교한다.

풀이

이 풀이 전체에서 e_G와 e_H는 G와 H의 항등원(identity)이고, G와 H에서의 역원(inverse)은 g^{-1}과 h^{-1}로 쓴다.

$G \times H$는 군이다

네 가지 공리를 확인한다.

닫힘(*closure*). $g_1, g_2 \in G$이고 $h_1, h_2 \in H$이면 G와 H가 닫혀 있으므로 $g_1 * g_2 \in G$이고 $h_1 \circ h_2 \in H$이다. 따라서 $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 * g_2,\ h_1 \circ h_2) \in G \times H$이다.

결합법칙(*associativity*). 임의의 세 원소에 대하여

$$\begin{aligned}((g_1, h_1)(g_2, h_2))(g_3, h_3) &= ((g_1 * g_2) * g_3,\ (h_1 \circ h_2) \circ h_3) \\ &= (g_1 * (g_2 * g_3),\ h_1 \circ (h_2 \circ h_3)) \\ &= (g_1, h_1)((g_2, h_2)(g_3, h_3)),\end{aligned}$$

이 성립한다. 여기서 가운데 단계는 G와 H에서의 결합법칙을 이용한 것이다.

항등원. 순서쌍 (e_G, e_H)는

$$(e_G, e_H)(g,h) = (e_G * g,\ e_H \circ h) = (g,h),$$

를 만족하고, 마찬가지로 $(g,h)(e_G, e_H) = (g,h)$이다. 따라서 이것은 항등원이다.

역원. (g,h)가 주어지면 순서쌍 (g^{-1}, h^{-1})은 $G \times H$에 속하고

$$(g,h)(g^{-1}, h^{-1}) = (g * g^{-1},\ h \circ h^{-1}) = (e_G, e_H),$$

이며, 순서를 바꾼 곱도 (e_G, e_H)이다. 따라서 모든 원소는 역원을 가진다.

네 공리가 모두 성립하므로 $G \times H$는 이 곱셈에 대하여 군이다.

소문항 (i): 참

G와 H가 아벨군(*abelian*)이면 $G \times H$도 아벨군이다. 임의의 두 원소에 대하여 G와 H에서의 교환법칙을 이용하면

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 * g_2,\ h_1 \circ h_2) = (g_2 * g_1,\ h_2 \circ h_1) = (g_2, h_2)(g_1, h_1),$$

이다.

$G \times H$가 아벨군이면 G와 H도 아벨군이다. 임의의 $g_1, g_2 \in G$를 잡자. $G \times H$가 아벨군이므로

$$(g_1 * g_2,\ e_H) = (g_1, e_H)(g_2, e_H) = (g_2, e_H)(g_1, e_H) = (g_2 * g_1,\ e_H).$$

이다. 순서쌍이 같으려면 첫째 좌표가 같아야 하므로 $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$이고, G는 아벨군이다. 같은 방법으로 순서쌍 (e_G, h_1)과 (e_G, h_2)를 이용하면 H가 아벨군임을 보일 수 있다.

> **생각해 보기** 두 번째 방향에서 왜 항등원 e_H가 필요할까?

g_1과 g_2로부터 $G \times H$의 원소를 만들려면 어떤 둘째 좌표가 있어야 한다. 비교할 때는 첫째 좌표만 중요하므로 고정된 아무 $h \in H$나 써도 된다. 군에는 항상 항등원이 있으므로, e_H는 존재가 보장된 안전한 선택이다.

소문항 (ii): 참

$\widetilde{G} = \{(g, e_H) : g \in G\}$라 하고, $\phi\colon G \to \widetilde{G}$를 $\phi(g) = (g, e_H)$로 정의하자.

$\widetilde{G}$는 $G \times H$의 부분군(subgroup)이다. 항등원 (e_G, e_H)를 포함한다. $(g_1, e_H)(g_2, e_H) = (g_1 * g_2, e_H)$이므로 곱에 대하여 닫혀 있다. $(g, e_H)^{-1} = (g^{-1}, e_H)$이므로 역원에 대하여 닫혀 있다.

ϕ는 동형사상(isomorphism)이다. 정의에 의하여 $\widetilde{G}$ 위로의 전사(onto)이다. $(g_1, e_H) = (g_2, e_H)$이면 반드시 $g_1 = g_2$이므로 일대일(one-to-one)이다. 또한

$$\phi(g_1 * g_2) = (g_1 * g_2,\ e_H) = (g_1, e_H)(g_2, e_H) = \phi(g_1)\phi(g_2).$$

이므로 연산을 보존한다. 따라서 $G \times H$는 G와 동형인 부분군 $\tilde{G}$를 포함한다.

소문항 (iii): 거짓

두 군을 모두 덧셈으로 쓰자. 즉 $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$은 mod n 덧셈에 대한 군이다. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$에서는 모든 원소 $x = (a, b)$가

$$x + x = (2a, 2b) = (0, 0),$$

를 만족하므로, 모든 원소의 위수는 1 또는 2이다. 반면 $\mathbb{Z}_4$에서는 $1 + 1 = 2 \neq 0$이므로 1의 위수는 4이다.

동형사상 $\phi\colon \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$가 존재한다고 가정하자. 그러면 위의 계산에 의하여 $\phi(1) + \phi(1) = (0, 0)$이므로

$$\phi(2) = \phi(1 + 1) = \phi(1) + \phi(1) = (0, 0) = \phi(0),$$

이다. 마지막 등식은 동형사상이 항등원을 항등원으로 보내기 때문에 성립한다. 그러면 $2 \neq 0$인데 $\phi(2) = \phi(0)$이 되어 ϕ가 일대일이 아니므로 모순이다. 따라서 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$는 $\mathbb{Z}_4$와 동형이 아니다. (간단히 말하면, $\mathbb{Z}_4$는 순환군(cyclic group)이고 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$는 순환군이 아니다.)

소문항 (iv): 거짓

동형사상은 전단사(bijection)이므로 동형인 군들은 원소의 개수가 같다. 그런데 n개의 대상을 배열하는 방법이 $n!$가지이므로 $|S_n| = n!$이고, 각 순서쌍은 g와 h를 자유롭게 고른 것이므로 $|G \times H| = |G|\,|H|$이다. 따라서

$$|S_2 \times S_3| = 2! \times 3! = 12, \qquad |S_6| = 6! = 720.$$

이다. 크기가 다르므로 $S_2 \times S_3$는 S_6와 동형이 아니다.

검산

- 작은 예($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times S_3$, $S_3 \times S_3$, $S_2 \times S_3$ 등)에서 모든 경우를 직접 확인하면, 곱은 항등원 (e_G, e_H)와 함께 네 공리를 모두 만족한다. 곱은 두 인수가 모두 아벨군일 때, 그리고 그때에만 아벨군이며, $g \mapsto (g, e_H)$는 단사(injective) 준동형사상(homomorphism)이다.
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$의 원소의 위수는 $1, 2, 2, 2$이고 $\mathbb{Z}_4$의 원소의 위수는 $1, 2, 4, 4$이므로, 두 군은 정말로 다르다.
- $S_2 \times S_3$의 원소를 나열하면 12개이고, S_6는 720개이다.

흔한 실수

- (i)에서 필요충분조건(if and only if)의 한쪽 방향만 증명하는 것. 역방향이 바로 둘째 좌표에 e_H를 넣는 기법이 필요한 부분이다.
- (ii)에서 "G는 $G \times H$의 부분군이다"라고 말하는 것. 엄밀히 말하면 G는 $G \times H$의 부분집합조차 아니다. 부분군은 $G \times \{e_H\}$이고, 이것이 G와 **동형**이다.
- (iii)에서 두 군의 위수가 모두 4임을 확인하고 거기서 멈추는 것. 크기가 같다는 것은 동형이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니므로, 두 군을 구별해 주는 성질이 필요하다.

STEP 너머

이것은 **직접곱**(direct product) 구성으로, 기존의 군으로부터 새로운 군을 만드는 가장 간단한 방법이다. 대학 첫 강좌의 주요 결과 중 하나는 모든 유한 아벨군이 순환군들의 직접곱이라는 것이다. 이와 관련된 사실로, $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$은 $\gcd(m,n) = 1$일 때, 그리고 그때에만 성립하는데, 이것은 중국인의 나머지 정리(Chinese remainder theorem)를 군론의 관점에서 본 모습이다. 소문항 (iii)은 이것이 성립하지 않는 가장 작은 경우이다. 더 알고 싶다면 Allenby, *Rings, Fields and Groups*를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.