풀이

STEP III 1987, 문제 8

순수수학 • 평행사변형 넓이에 관한 부등식

> **STEP III 1987, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q8

핵심 아이디어

평행사변형(parallelogram)의 두 대각선(diagonal)은 서로를 이등분(bisect)하므로, 평행사변형을 네 개의 삼각형으로 나누고 각 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin C$를 써서 곧바로 구할 수 있다. 이렇게 하면 두 대각선과 그 사잇각으로 넓이를 나타내는 공식을 얻고, 앞의 두 결과는 이 공식에서 바로 따라 나온다. 집합 A는 두 띠(strip)가 교차하는 영역이므로 평행사변형이다. 그 넓이를 계산하면 두 번째 결과에 의해 긴 대각선이 충분히 길어야 하고, 그 대각선의 두 끝점이 바로 우리가 찾는 점이다.

풀이

대각선으로 나타낸 넓이

두 대각선의 길이를 p와 q라 하고, 두 대각선이 각 θ로 만난다고 하자. 단, $0 < \theta < \pi$이다. 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로, 평행사변형은 네 개의 삼각형으로 나뉘고, 각 삼각형은 중심에서 만나는 두 변 $\frac{1}{2}p$와 $\frac{1}{2}q$를 가진다. 이 가운데 두 삼각형은 중심에서의 각이 θ이고, 나머지 두 삼각형은 $\pi - \theta$이다. $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$이므로 각 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2}\sin\theta$이고, 따라서

$$\text{넓이} = 4 \cdot \tfrac{1}{8}pq\sin\theta = \tfrac{1}{2}pq\sin\theta.$$

p와 q가 고정되어 있으면 이 값은 $\sin\theta$가 최대일 때, 즉 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 최대이다. 그러므로 넓이는 두 대각선이 수직일 때, 그리고 그때에만 최대가 되며, 최대 넓이는 $\frac{1}{2}pq$이다.

긴 대각선에 의한 상계

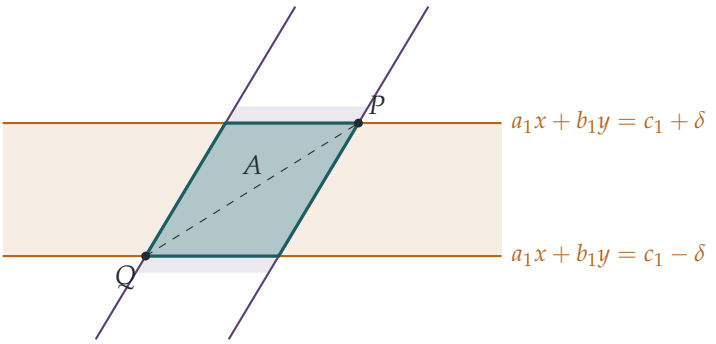
$p \geq q$라 하여 p가 긴 대각선(또는 길이가 같은 두 대각선 중 하나)이라 하자. $\sin\theta \leq 1$과 $q \leq p$를 차례로 쓰면

$$\text{넓이} = \tfrac{1}{2}pq\sin\theta \leq \tfrac{1}{2}pq \leq \tfrac{1}{2}p^2.$$

따라서 넓이는 긴 대각선의 길이의 제곱의 절반 이하이다. 등호가 성립하려면 $\sin\theta = 1$이고 $q = p$이어야 하므로, 등호는 정사각형일 때에만 성립한다.

집합 A는 평행사변형이다

$\delta > 0$이라 하자. ($\delta = 0$이면 상계가 0이므로, A의 한 점을 두 번 택하면 된다.) 부등식 $|a_1x + b_1y - c_1| \leq \delta$는 $c_1 - \delta \leq a_1x + b_1y \leq c_1 + \delta$라는 뜻이다. 따라서 이 부등식은 평행한 두 직선 $a_1x + b_1y = c_1 \pm \delta$ 사이의 닫힌 띠를 나타낸다. 두 번째 부등식도 같은 방식으로 두 번째 띠를 나타낸다. 조건 $a_1b_2 \neq a_2b_1$은 법선 벡터(normal vector) $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$과 $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$가 평행하지 않다는 뜻이다. 그러므로 두 띠는 교차하고, $\mathbf{n}_1$과 $\mathbf{n}_2$ 모두 영벡터가 아니다. 두 띠의 교집합 A는 평행한 두 쌍의 직선으로 둘러싸인 평행사변형이다.



그림은 첫 번째 띠(호박색)와 두 번째 띠의 일부(자주색)를 보여 준다. 두 띠의 교집합 A(청록색)는 평행사변형이고, 점선은 그 긴 대각선이다.

A의 넓이

점과 직선 사이의 거리 공식을 쓰면, 평행한 두 직선 $a_1x + b_1y = c_1 \pm \delta$ 사이의 거리는

$$h_1 = \frac{2\delta}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

이다. 마찬가지로 두 번째 띠의 폭은 $h_2 = 2\delta/\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$이다. 두 직선족 사이의 각을 φ라 하자. 단, $0 < \varphi < \pi$이다. A의 변 가운데 두 번째 띠의 경계 위에 놓인 변은 첫 번째 띠를 각 φ로 가로지르므로, 각각의 길이는 $h_1/\sin\varphi$이다. 이 두 변 사이의 수직 거리는 h_2이므로

$$\text{넓이} A = \frac{h_1h_2}{\sin\varphi}.$$

? 생각해 보기 계수로부터 $\sin\varphi$를 어떻게 구할까?

두 직선 사이의 각은 두 법선 사이의 각 또는 그 보각과 같고, 둘의 사인값은 같다. 벡터 $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$과 $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$가 만드는 평행사변형의 넓이는 $|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|\sin\varphi$이다. 이 넓이는 2×2 행렬식(determinant)의 절댓값인 $|a_1b_2 - a_2b_1|$과도 같다. 따라서

$$\sin\varphi = \frac{|a_1b_2 - a_2b_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

이를 대입하면 제곱근이 약분된다.

$$\text{넓이}A = \frac{2\delta}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\cdot\frac{2\delta}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\cdot\frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}{|a_1b_2-a_2b_1|} = \frac{4\delta^2}{|a_1b_2-a_2b_1|}.$$

두 점

PQ를 A의 긴 대각선이라 하고, $P=(x_1,y_1)$, $Q=(x_2,y_2)$라 하자. 이 점들은 A의 꼭짓점이고, 두 띠는 경계 직선을 포함하므로 이 점들은 A에 속한다. 첫 번째 부분에서 얻은 상계에 의해

$$\frac{4\delta^2}{|a_1b_2-a_2b_1|} = \text{넓이}A \le \tfrac{1}{2}PQ^2,$$

이므로

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = PQ^2 \ge \frac{8\delta^2}{|a_1b_2-a_2b_1|},$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- $a_1=b_2=1$, $a_2=b_1=0$으로 두면 A는 정사각형 $|x-c_1|\le\delta$, $|y-c_2|\le\delta$이다. 그 대각선 길이의 제곱은 $(2\delta)^2+(2\delta)^2=8\delta^2$으로, 상계와 정확히 같다. 정사각형이 첫 번째 부분의 등호 조건이므로 이는 앞뒤가 맞는다.
- 배율 변환: a_1, b_1, c_1을 두 배로 하면 첫 번째 띠의 폭이 절반이 되고, A의 넓이도 절반이 되며, $|a_1b_2-a_2b_1|$은 두 배가 된다. 공식이 올바르게 작동한다.
- 컴퓨터로 무작위 사례 10^5개를 검사하였다. 경계 방정식을 풀어 A의 꼭짓점을 구했더니, 신발끈 공식(shoelace formula)으로 구한 넓이가 매번 $4\delta^2/|a_1b_2-a_2b_1|$과 일치하였다. (긴 대각선)^{2}과 상계의 비의 최솟값은 1.0007로, 1보다 작은 경우는 한 번도 없었다.

흔한 실수

- 띠의 폭을 2δ로 잡는 것. $|a_1x + b_1y - c_1| \leq \delta$의 폭은 $2\delta/\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$이다.
- 택한 점들이 왜 A에 속하는지 밝히지 않는 것. 그 점들은 꼭짓점이고 A는 경계를 포함하므로 A에 속한다.
- A의 넓이를 h_1h_2로 쓰는 것. 이는 두 띠가 수직일 때에만 옳다.

STEP 너머

이 넓이 계산은 한 가지 근본적인 사실의 특수한 경우이다. 행렬 M으로 주어지는 선형 사상(linear map)은 모든 넓이를 $|\det M|$배 한다. 여기서 사상 $(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y,\ a_2x + b_2y)$는 A를 넓이가 $4\delta^2$인 정사각형으로 보내므로, A의 넓이는 $4\delta^2/|\det M|$이다. 이것은 이중적분에서 변수를 바꿀 때 만나는 야코비안(Jacobian) 인자이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이런 방식으로 행렬식을 넓이와 부피로 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.