풀이

# STEP III 1987, 문제 7

순수수학 • 아크탄젠트의 급수

> **STEP III 1987, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q7

## 핵심 아이디어

$\tan^{-1} t$의 급수(series)는 $1/(1+x^2)$을 적분하여 얻고, $1/(1+x^2)$은 공비가 $-x^2$인 등비급수(geometric series)의 합이다. 등비급수를 유한 개의 항에서 끊으면 **정확한** 나머지(remainder)가 남고, 이 나머지를 적분하면 오차항(error term)이 된다. 구간 $[0,1]$에서 인수 $1/(1+x^2)$은 $\frac{1}{2}$과 1 사이에 있으므로, 오차는 쉽게 계산되는 두 적분 사이에 갇힌다.

## 풀이

### 항등식

임의의 실수 $x$에 대하여, 첫째항이 1이고 공비가 $-x^2$인 유한 등비급수는

$$\sum_{r=0}^{n}(-x^2)^r = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2},$$

을 준다. 공비 $-x^2$이 결코 1과 같지 않으므로 이 식은 성립한다. 이를 정리하면

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

이것은 근사가 아니라 정확한 항등식(identity)이다. 양변을 0부터 $t$까지 적분한다. $\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \tan^{-1} t$이고 $\int_0^t x^{2r}\,\mathrm{d}x = \frac{t^{2r+1}}{2r+1}$이므로

$$\tan^{-1} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^t \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 이 식은 모든 실수 $t$에 대하여 성립한다.

### 부등식

$S_n(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r t^{2r+1}}{2r+1}$이라 하자. 항등식에 의하여

$$\left|\tan^{-1} t - S_n(t)\right| = \int_0^t \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

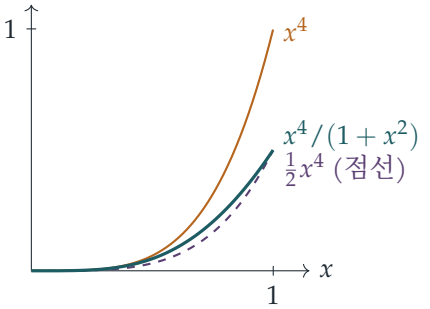
이다. 여기서 우변의 절댓값 기호를 없앨 수 있는 것은, $t \geq 0$일 때 피적분함수(integrand)가 음이 아니고 적분이 정방향으로 진행되기 때문이다.

**생각해 보기** 닫힌 형태로 계산할 수 없는 적분은 어떻게 어림할 수 있을까?

피적분함수의 다루기 어려운 부분을 상수로 누른다. $0 \leq x \leq 1$이면 $1 \leq 1+x^2 \leq 2$이므로

$$\tfrac{1}{2}x^{2n+2} \leq \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}.$$

아래 그림은 $n = 1$인 경우를 보여 준다. 피적분함수(청록색)가 $x^4$과 $\frac{1}{2}x^4$ 사이에 끼어 있다.




이 부등식들을 0부터 $t$까지 적분하면($t \geq 0$이므로 부등호 방향은 유지된다)

$$\frac{t^{2n+3}}{2(2n+3)} \leq \left|\tan^{-1} t - S_n(t)\right| \leq \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

을 얻는다. 이것이 원하는 결과이다.

### $\pi$의 급수

$t = 1$을 대입하면 $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$이고 $S_n(1) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1}$이다. 상계(upper bound)에 의하여

$$\left|\pi - 4\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3} \to 0 \quad \text{극한: } n \to \infty,$$

이므로 $4\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1} \to \pi$이다.

**생각해 보기** 두 부등식 가운데 어느 쪽이 근사가 나쁘다는 것을 알려 줄까?

하계(lower bound)이다. 하계는 오차가 작을 수 없다는 것을 말해 준다. $t = 1$에서 왼쪽 부등식에 4를 곱하면

$$\left|\pi - 4\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{2r+1}\right| \geq \frac{4}{2(2n+3)} = \frac{2}{2n+3}.$$

$n \leq 98$이면 $2n+3 \leq 199 < 200$이므로 $\frac{2}{2n+3} > \frac{2}{200} = 10^{-2}$이다. 따라서 모든 $n \leq 98$에 대하여 오차는 적어도 $10^{-2}$이다(실제로는 이보다 엄격히 크다). 오차가 $4/(2n+3)$보다 작으므로, 항을 백 개 써도 소수점 아래 두 자리 정도밖에 얻지 못한다. 그러므로 이 급수는 $\pi$를 계산하는 매우 느린 방법이다.

## 검산

- $n = 0, t = 1$: 부등식은 $\frac{1}{6} \leq \left|\frac{\pi}{4} - 1\right| \leq \frac{1}{3}$을 말한다. 실제로 $1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215$이다.
- 수치로 확인하면, $n = 98$일 때 오차는 $|\pi - 4S_{98}(1)| \approx 0.01010$으로 $10^{-2}$보다 조금 크다. $n = 99$일 때는 약 0.0099998로 조금 작다. 따라서 98이 정확히 경계값이다. 또한 임의의 $t$와 $n$에 대하여 수치 적분(quadrature)으로 항등식을 확인하였고, 수천 개의 임의의 $t \in [0,1]$에 대하여 양쪽 부등식을 확인하였다.

## 흔한 실수

- $1/(1+x^2)$을 **무한** 급수로 전개한 뒤 항별 적분하는 것. 이렇게 하려면 $|x| < 1$이어야 하고, 합과 적분의 순서를 바꾸는 것을 정당화해야 한다. 정확한 나머지가 있는 유한 형태를 쓰면 두 문제를 모두 피할 수 있다.
- 상계를 이용하여 오차가 크다고 주장하는 것. 그런 주장은 하계만이 할 수 있다.

## STEP 너머

이것은 적분형 나머지를 가진 테일러 정리(Taylor's theorem)를 한 함수에 대하여 손으로 직접 유도한 것이다. $t = 1$에서의 급수는 라이프니츠(Leibniz) 급수(또는 마다바(Madhava)–그레고리(Gregory) 급수)이다. 대략 $1/(2n)$인 오차는 항이 천천히 감소하는 교대급수(alternating series)에서 전형적으로 나타난다. 마친(Machin)의 공식 $\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$과 같은 더 빠른 공식은 같은 급수를 작은 $t$에서 사용하는데, 이때 $t^{2n+3}$이 빠르게 작아진다. 나머지와 수렴(convergence)을 엄밀하게 다룬 내용은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.