풀이

STEP III 1987, 문제 6

순수수학 • 연립 미분방정식

> **STEP III 1987, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q6

핵심 아이디어

서로 얽힌 한 쌍의 일계 방정식(coupled first-order equations)은 한 미지함수에 대한 하나의 이계 방정식(second-order equation)으로 바꾸는 것이 가장 좋다. 첫 번째 방정식을 이용하면 y를 x와 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$로 나타낼 수 있고, 이를 두 번째 방정식에 대입하면 x에 대한 강제 진동자 방정식(forced oscillator equation)이 남는다. 그러면 답의 성격 전체는 이 진동자의 고유진동수(natural frequency)가 강제항 $2\cos t$의 진동수와 어떤 관계에 있는지에 따라 결정된다.

풀이

t에 대한 도함수는 점으로 나타낸다.

y 소거하기

첫 번째 방정식으로부터

$$y = \tfrac{1}{5}\left(\dot{x} + 2x\right), \qquad \text{따라서} \qquad \dot{y} = \tfrac{1}{5}\left(\ddot{x} + 2\dot{x}\right).$$

두 식을 모두 두 번째 방정식에 대입하고 5를 곱하면

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5ax - 2\left(\dot{x} + 2x\right) = 10\cos t,$$
$$\ddot{x} + (5a - 4)\,x = 10\cos t.$$

$\dot{x}$ 항이 소거되므로 감쇠(damping)가 없다. 즉 이것은 ($5a > 4$일 때) 고유진동수가 $\sqrt{5a-4}$인 순수한 강제 진동자이다.

초기 조건 바꾸기

주어진 조건은 $x(0) = 0$과 $\dot{y}(0) = 0$이지만, x에 대한 방정식에는 $x(0)$과 $\dot{x}(0)$이 필요하다. 원래의 두 번째 방정식에 $t = 0$을 대입하면

$$\dot{y}(0) + a\,x(0) - 2y(0) = 2 \quad \Longrightarrow \quad 0 + 0 - 2y(0) = 2 \quad \Longrightarrow \quad y(0) = -1.$$

그러면 $t = 0$에서 첫 번째 방정식으로부터 $\dot{x}(0) = 5y(0) - 2x(0) = -5$를 얻는다. 어느 단계에서도 a의 값을 사용하지 않았으므로

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = -5 \qquad \text{모든} a.$$

이다.

> **?** **생각해 보기** 조건은 y가 아니라 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$에 대한 것이다. 이를 어떻게 이용할까?

미분방정식 자체가 임의의 한 순간에서 x, y와 그 도함수들의 값을 서로 연결해 준다. $t = 0$에서 두 번째 방정식은 $\dot{y}(0)$에 대한 정보를 $y(0)$에 대한 정보로 바꾸어 주고, 이어서 첫 번째 방정식은 그것을 $\dot{x}(0)$으로 바꾸어 준다. 이것이 바로 x에 대한 이계 방정식에 필요한 것이다.

$a = 1$인 경우

이제 방정식은

$$\ddot{x} + x = 10\cos t.$$

이다. 여함수(complementary function)는 $A\cos t + B\sin t$이다. 강제항 $\cos t$ 자체가 동차 방정식(homogeneous equation)의 해이므로(이것이 공명(resonance)이다), $C\cos t$ 꼴로 시도하면 실패한다. 따라서 $x_p = t\,(C\cos t + D\sin t)$ 꼴로 시도한다. 두 번 미분하면

$$\ddot{x}_p + x_p = -2C\sin t + 2D\cos t,$$

이므로 $C = 0$, $D = 5$이고, $x_p = 5t\sin t$를 얻는다. 따라서

$$x = A\cos t + B\sin t + 5t\sin t.$$

조건 $x(0) = 0$에서 $A = 0$이다. 그러면 $\dot{x} = B\cos t + 5\sin t + 5t\cos t$이므로 $\dot{x}(0) = B = -5$이다. 그러므로

$$\boxed{x = 5(t-1)\sin t}$$

y를 구하기 위해 $\dot{x} = 5\sin t + 5(t-1)\cos t$와 함께 $y = \frac{1}{5}(\dot{x} + 2x)$를 이용하면

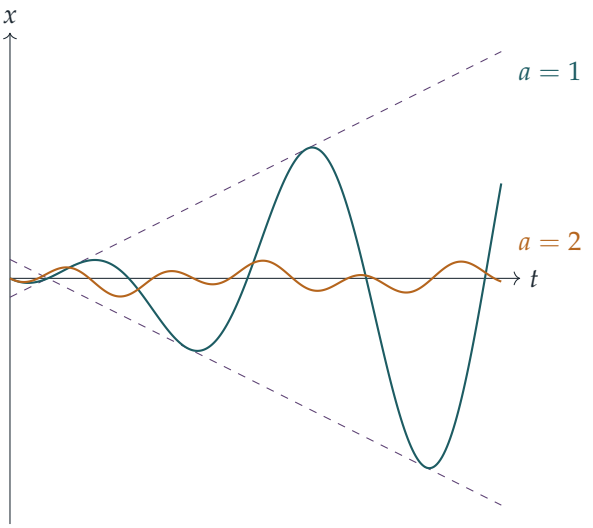
$$y = \sin t + (t-1)\cos t + 2(t-1)\sin t, \qquad \text{즉} \qquad \boxed{y = (t-1)\cos t + (2t-1)\sin t}$$

간단히 검산해 보면 $y(0) = -1$이고, $\dot{y} = \cos t - (t-1)\sin t + 2\sin t + (2t-1)\cos t$에서 $\dot{y}(0) = 1 - 1 = 0$이므로 조건을 만족한다.

$a > 1$인 경우

이제 $5a - 4 > 1$이므로 $\omega > 1$인 $\omega = \sqrt{5a-4}$로 놓는다. 방정식 $\ddot{x} + \omega^2 x = 10\cos t$는 강제 진동수 1이 고유진동수 ω와 다르므로 더 이상 공명 상태가 아니다. 따라서 다음이 성립한다.

- 여함수는 $A\cos\omega t + B\sin\omega t$이며, 주기 2π가 아니라 주기 $2\pi/\omega$(2π보다 짧다)로 진동한다.
- 특수해(particular integral)는 단순히 $\cos t$의 상수배이며 t라는 인수가 없으므로, $t\sin t$와 같은 항이 없다.
- 따라서 x(그리고 마찬가지로 $y = \frac{1}{5}(\dot{x} + 2x)$)는 진동수가 1과 ω인 사인파들의 합이다. $a = 1$일 때처럼 진폭이 t에 대해 일차적으로 커지며 진동하는 대신, 두 경우 모두 모든 t에 대하여 유계로 남는다. 운동은 ω가 유리수일 때에만 주기적이며, 일반적으로는 서로 "맥놀이(beat)"를 일으키는 두 진동의 중첩이다.



검산

- $x = 5(t-1)\sin t$와 $y = (t-1)\cos t + (2t-1)\sin t$를 원래의 두 방정식에 다시 대입하면 항등적으로 성립한다. 단계별 수치해($x = 0$, $y = -1$에서 출발하는 4차 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법)는 $0 \le t \le 10$에서 공식과 10^{-10} 이내로 일치한다. 예를 들어 $x(10) = 45\sin 10 \approx -24.481$이다.
- $a > 1$일 때 완전한 해는 $x = \frac{2}{a-1}(\cos t - \cos\omega t) - \frac{5}{\omega}\sin\omega t$임이 밝혀진다. $a \to 1$일 때 $\omega - 1 \approx \frac{5}{2}(a-1)$이고 $\cos t - \cos\omega t \approx (\omega - 1)\, t\sin t$이므로, $5t\sin t - 5\sin t$를 다시

얻는다. 공명 상태의 답은 공명이 아닌 상태의 답의 극한이다.

흔한 실수

- $\dot{y}(0)$에 대한 조건으로부터 $y(0) = -1$을 이끌어 내지 않고 $y(0) = 0$을 사용하는 것.
- $a = 1$일 때 특수해로 $C\cos t + D\sin t$를 시도하는 것. 이것은 여함수의 일부이므로 $0 = 10\cos t$가 나온다.
- 새로운 임의 상수를 두고 y를 따로 푸는 것. 일단 x를 알면 y는 $y = \frac{1}{5}(\dot{x} + 2x)$로 정해진다.

STEP 너머

이와 같은 선형 연립방정식은 사실 $\mathbf{v} = (x, y)$와 상수 행렬 M에 대한 $\dot{\mathbf{v}} = M\mathbf{v} + \mathbf{f}(t)$이다. M의 고윳값(eigenvalue), 여기서는 $\pm\sqrt{4 - 5a}$가 자유 운동이 커지는지, 감소하는지, 진동하는지를 결정한다. 공명은 강제 진동수가 고윳값 $\pm$i와 맞아떨어질 때 일어나며, 이는 정확히 $a = 1$인 경우이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 행렬을 이용한 연립방정식과, 공명 및 맥놀이를 포함한 강제 진동을 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.