풀이

STEP III 1987, 문제 4

순수수학 • 회전체의 부피

STEP III 1987, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

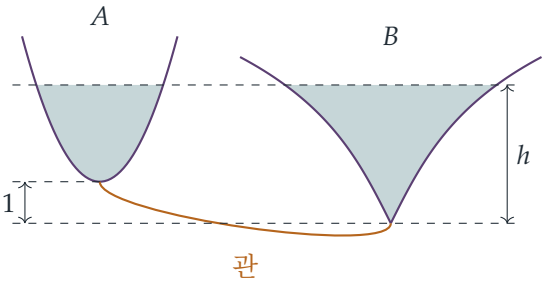
step.maths.org/questions/87-s3-q4

핵심 아이디어

물은 한 깔때기에서 다른 깔때기로 옮겨 갈 뿐이므로 그 부피는 보존된다. 각 깔때기는 y축을 중심으로 한 회전체(solid of revolution)이므로, 깊이 d까지 찬 물의 부피는 x^2을 y로 나타낸 뒤 $\int_0^d \pi x^2 \, \mathrm{d}y$로 구한다. 두 부피를 모두 깊이의 함수로 알고 나면, 남은 주의점은 서로 다른 두 기준 높이뿐이다. A와 B의 깊이는 한 단위만큼 차이 난다.

풀이

관의 부피는 무시할 수 있다고 보고, 문제에 나오는 두 번째 "closed"는 "opened"로 읽는다(그렇지 않으면 물이 전혀 움직일 수 없다). y는 각 깔때기의 바닥에서부터 위쪽으로 잰다.



깊이의 함수로 나타낸 부피

A의 경우 곡선은 $y = x^2$이므로, 높이 y에서의 수평 단면(cross-section)은 넓이가 $\pi x^2 = \pi y$인 원판이다. A에 깊이 d로 찬 물의 부피는

$$V_A(d) = \int_0^d \pi y \, \mathrm{d}y = \frac{\pi d^2}{2}.$$

이다. B의 경우, $x > 0$인 곡선 $y = 2\sinh^{-1} x$를 거꾸로 풀면 $x = \sinh \frac{y}{2}$이다. $\sinh^2 \frac{y}{2} = \frac{1}{2}(\cosh y - 1)$을 이용하면, B에 깊이 d로 찬 물의 부피는

$$V_B(d) = \int_0^d \pi \sinh^2 \frac{y}{2} \, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} \int_0^d (\cosh y - 1) \, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} \left(\sinh d - d\right).$$

이다.

물의 보존

처음에 A에는 깊이 4의 물이 있고 B는 비어 있으므로, 전체 부피는

$$V_A(4) = \frac{16\pi}{2} = 8\pi.$$

이다. 마지막에는 두 수면이 모두 B의 바닥에서 높이 h에 있다. 따라서 B의 물의 깊이는 h이다. A의 바닥은 B의 바닥보다 한 단위 높으므로, A의 물의 깊이는 $h - 1$이다.

? 생각해 보기 애초에 두 수면은 왜 같은 높이에 이르게 될까?

두 깔때기와 관은 정지해 있는 하나로 연결된 물덩어리를 이룬다. 그 압력은 높이에만 의존하고, 두 자유 수면은 모두 대기압을 받으므로 같은 높이에 있다. 이 사실은 문제에서 주어지지만, 두 깊이의 차이가 왜 정확히 두 바닥의 높이 차이와 같은지를 설명해 준다.

물은 늘지도 줄지도 않았으므로

$$\frac{\pi(h-1)^2}{2} + \frac{\pi}{2}\left(\sinh h - h\right) = 8\pi.$$

이다. 양변에 $2/\pi$를 곱하고 전개하면

$$\begin{aligned}(h-1)^2 + \sinh h - h &= 16\\ h^2 - 2h + 1 + \sinh h - h &= 16\\ h^2 - 3h + \sinh h &= 15,\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 방정식이다.

가운데 줄의 좌변은 A에 실제로 물이 들어 있는 $h \geq 1$에서만 의미 있는 모형이다. 이 범위에서 그 도함수(derivative) $2(h-1) + \cosh h - 1$은 양수이므로, 방정식은 의미 있는 근(root)을 정확히 하나 가진다. 수치적으로 $h \approx 3.33$이므로, A의 물은 깊이 4에서 약 2.33으로 내려간다.

검산

- 이분법(bisection)으로 $h \approx 3.3272$를 얻는다. 그러면 $V_A(h-1) + V_B(h) \approx 25.1327$이고, 이는 $8\pi \approx 25.1327$과 일치한다.
- $\int_0^d \pi \sinh^2(y/2)\,\mathrm{d}y$에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용한 값은 여러 d 값에 대해 $\frac{\pi}{2}(\sinh d - d)$와 일치한다(예를 들어 $d = 1.7$이면 두 방법 모두 1.48540을 준다).
- 타당성: $h - 1 < 4$이므로 A의 수위가 내려갔다. 물이 빠져나가는 깔때기라면 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- 두 깔때기 모두에서 깊이를 h로 쓰는 실수로, A의 바닥이 한 단위 더 높다는 사실을 잊은 것이다. 그러면 대신 $h^2 - h + \sinh h = 16$을 얻게 된다.
- $\pi x^2\,\mathrm{d}y$ 대신 $\pi y^2\,\mathrm{d}x$(x축을 중심으로 한 회전)를 적분하는 실수.
- $y = 2\sinh^{-1} x$의 역을 $x = 2\sinh y$나 $x = \frac{1}{2}\sinh y$로 구하는 실수. 올바른 역은 $x = \sinh\frac{y}{2}$이다.

STEP 너머

마지막 방정식은 다항식(polynomial)과 쌍곡선 함수(hyperbolic function)가 섞여 있어서 닫힌 형태의 해(closed-form solution)가 없다. 따라서 수치적으로 풀어야 하며, 앞에서 본 단조성(monotonicity) 논증이 바로 이분법이나 뉴턴–랩슨 법(Newton–Raphson method) 같은 방법이 물리적으로 의미 있는 단 하나의 근을 찾아낸다는 것을 보장해 준다. 대학 1학년 수치해석(numerical analysis)에서는 중간값 정리(intermediate value theorem)와 수렴 속도(convergence rate)를 이용해 이를 엄밀하게 다룬다. 그 바탕이 되는 해석학은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.