풀이

STEP III 1987, 문제 3

순수수학 • 편각과 마친 공식

STEP III 1987, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s3-q3

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.1 절 **마친의 공식**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/machin.html

핵심 아이디어

두 소문항 모두 복소수(complex number)의 극형식(polar form)에 바탕을 둔다. (i)에서 점 $(|x|, |y|)$는 원점으로부터 거리 $|z|$에 있으므로, $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$는 $|z|$에 코사인을 곱한 값이다. (ii)에서는 복소수를 곱하면 편각(argument)이 더해진다. 따라서 $5 - \mathrm{i}$나 $1 + \mathrm{i}$ 같은 수들의 곱이 실수에 매우 가깝게 나온다면, 그 편각으로부터 역탄젠트(inverse tangent) 사이의 항등식을 얻는다. 정말로 주의해야 할 점은 편각에 2π만큼의 모호함이 있다는 것뿐이다.

풀이

소문항 (i)

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$이라 하자. $r = 0$이면 $x = y = 0$이고 모든 항이 0이므로, $r > 0$이라고 가정한다.

오른쪽 부등식. 양변이 모두 음이 아니므로 제곱을 비교하면 충분하다.

$$(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \geq x^2 + y^2 = |z|^2,$$

이는 $|x||y| \geq 0$이기 때문이다. 음이 아닌 제곱근을 취하면 $|z| \leq |x| + |y|$를 얻고, 등호는 정확히 $x = 0$ 또는 $y = 0$일 때 성립한다.

왼쪽 부등식. 점 $(|x|, |y|)$는 경계를 포함한 제1사분면(quadrant)에 있고 원점으로부터 거리

r에 있으므로, 다음을 만족하는 각 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$가 존재한다.

$$|x| = r\cos\varphi, \qquad |y| = r\sin\varphi.$$

그러면 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formula)에 의해

$$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha = r(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha) = r\cos(\alpha - \varphi) \le r = |z|,$$

이다. 모든 실수 α에 대하여 $\cos(\alpha - \varphi) \le 1$이기 때문이다. 이로써 두 부등식(inequality)이 모두 증명된다. 왼쪽 부등식의 등호는 $\alpha = \varphi + 2k\pi$일 때, 즉 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$가 $(|x|, |y|)$와 같은 방향을 가리킬 때 성립한다.

(왼쪽 부등식을 보이는 다른 방법: 코시-슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality)에 의해 $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha \le \sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = |z|$이다.)

소문항 (ii): 첫 번째 공식

단계별로 전개한다.

$$\begin{aligned}(5-\mathrm{i})^2 &= 25 - 10\mathrm{i} - 1 = 24 - 10\mathrm{i},\\ (5-\mathrm{i})^4 &= (24-10\mathrm{i})^2 = 576 - 480\mathrm{i} - 100 = 476 - 480\mathrm{i},\\ (5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i}) &= 476 + 476\mathrm{i} - 480\mathrm{i} + 480 = 956 - 4\mathrm{i} = 4(239 - \mathrm{i}).\end{aligned}$$

이제 편각을 비교하자. $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{5}$라 하자. $5 - \mathrm{i}$는 제4사분면에 있으므로 편각이 $-\theta$이고, $1+\mathrm{i}$의 편각은 $\frac{\pi}{4}$이다. 마찬가지로 $4(239-\mathrm{i})$의 편각은 $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$이다. 곱셈에서 편각은 2π의 정수배 차이를 제외하고 더해지므로, 다음을 만족하는 정수 k가 존재한다.

$$\frac{\pi}{4} - 4\theta = -\tan^{-1}\frac{1}{239} + 2k\pi \quad \text{단, 정수} k.$$

> **생각해 보기** $k = 0$임을 어떻게 알 수 있을까?

양변의 범위를 제한해 보자. $0 < t < \frac{\pi}{2}$일 때 $\tan t > t$이므로 $0 < \theta < \frac{1}{5}$이고, 따라서 $\frac{\pi}{4} - 4\theta$는 $\frac{\pi}{4} - \frac{4}{5} > -1$과 $\frac{\pi}{4} < 1$ 사이에 있다. 또 $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$는 -1과 0 사이에 있다. $(-1, 1)$에 속하는 두 수의 차는 $2 < 2\pi$보다 작으므로 $2k\pi = 0$, 즉 $k = 0$이다. 식을 정리하면

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239},$$

이 되어 증명이 끝난다.

소문항 (ii): 두 번째 공식

같은 논리로, 편각이

$$\frac{\pi}{4} - 3\tan^{-1}\frac{1}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{20} - \tan^{-1}\frac{1}{1985},$$

인 곱, 즉 $(4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i})(1985-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$를 생각하고, 이것이 양의 실수이기를 기대한다. 인수 $1985-\mathrm{i}$는 마지막까지 남겨 두자.

$$\begin{aligned}(4-\mathrm{i})^2 &= 16-8\mathrm{i}-1 = 15-8\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3 &= (15-8\mathrm{i})(4-\mathrm{i}) = 60-15\mathrm{i}-32\mathrm{i}-8 = 52-47\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i}) &= 1040-52\mathrm{i}-940\mathrm{i}-47 = 993-992\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) &= 993+993\mathrm{i}-992\mathrm{i}+992 = 1985+\mathrm{i}.\end{aligned}$$

따라서 지금까지의 곱은 $1985+\mathrm{i}$이고, 마지막 인수 $1985-\mathrm{i}$는 그 켤레복소수(conjugate)이다. 그러므로 전체 곱은 1985^2+1로, 양의 실수이다. 이와 동치로, 마지막 인수 없이 편각을 비교하면

$$\frac{\pi}{4}-3\varphi-\psi = \tan^{-1}\frac{1}{1985}+2k\pi, \qquad \varphi=\tan^{-1}\frac{1}{4},\ \psi=\tan^{-1}\frac{1}{20}.$$

이다. 이번에도 $k=0$이다. $0<\varphi<\frac{1}{4}$이고 $0<\psi<\frac{1}{20}$이므로 좌변은 $\frac{\pi}{4}-\frac{4}{5}>-1$과 $\frac{\pi}{4}<1$ 사이에 있고, 우변에서 $2k\pi$를 뺀 값은 $(0,1)$에 속하기 때문이다. 식을 정리하면

$$\frac{\pi}{4} = 3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}.$$

검산

- 절댓값(modulus)은 전개 결과를 확인하는 좋은 방법이다. $|5-\mathrm{i}|^8\,|1+\mathrm{i}|^2 = 26^4\cdot 2 = 913\,952$이고, $956^2+4^2 = 913\,952$도 성립한다. 마찬가지로 $17^3\cdot 401\cdot 2 = 3\,940\,226 = 1985^2+1$이다.
- 수치적으로 $4\tan^{-1}\frac{1}{5}\approx 0.789582$이고, 여기서 $\tan^{-1}\frac{1}{239}\approx 0.004184$를 빼면 $0.785398\approx\frac{\pi}{4}$가 된다. 또 $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}\approx 0.784894$이고, 여기에 $\tan^{-1}\frac{1}{1985}\approx 0.000504$를 더하면 역시 $\frac{\pi}{4}$가 된다.
- (i)에서 $z=3-4\mathrm{i}$로 시험해 보자. 부등식은 $3\cos\alpha+4\sin\alpha\le 5\le 7$이 되고, $3\cos\alpha+4\sin\alpha=5\cos(\alpha-\varphi)$는 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$일 때 5에 도달한다.

흔한 실수

- $\arg(zw)=\arg z+\arg w$를 정확한 등식으로 쓰고 2π의 배수를 전혀 확인하지 않는 것. 최종 등식이 참이 되게 하는 것은 역탄젠트 값에 대한 범위 제한이다.
- $5-\mathrm{i}$ 대신 $5+\mathrm{i}$를 쓰는 것. 그러면 $(5+\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i}) = -4+956\mathrm{i}$가 되어, 실수에 가까운 것이 아니라 순허수에 가깝다. 곱이 실수에 가깝도록 부호를 골라야 한다.
- (i)에서 α가 임의의 값이어서 $\cos\alpha$나 $\sin\alpha$가 음수일 수 있다는 점을 잊는 것. 코사인 꼴로 나타내면 모든 α를 한꺼번에 다룰 수 있다.

STEP 너머

첫 번째 공식은 마친(Machin)의 공식(1706)이다. 작은 x에 대해 빠르게 수렴하는 급수(series) $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$와 함께 사용하여, 손 계산으로 π를 많은 자릿수까지 구하는 데 쓰였다. 이런 공식을 찾는 일은 가우스 정수(Gaussian integers) $a + b\mathrm{i}$에서의 인수분해에 관한 문제이며, 여기서 $1 + \mathrm{i}$, $5 \pm \mathrm{i}$, $4 \pm \mathrm{i}$는 소수(prime)처럼 행동한다. 이것이 대수적 정수론(algebraic number theory)의 첫 맛보기이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 두 제곱수의 합과 가우스 정수를 다루고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈의 기하학을 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.