풀이

STEP III 1987, 문제 2

순수수학 • 삼각함수 적분의 점화식

> **STEP III 1987, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q2

핵심 아이디어

점화 공식(reduction formula)은 "경계항(boundary term)" $\cos^m x \cos nx$를 미분한 다음, 덧셈정리(compound-angle identity)를 이용해 $\sin x \cos nx$를 $\sin(n-1)x$가 들어 있는 식으로 바꾸는 데서 나온다. 이 공식을 얻고 나면, 두 소문항 모두 그 경계항을 적분 구간의 양 끝에서 계산하는 문제가 된다. 0과 π에서는 홀짝성(parity)에 따라 경계항이 소거되거나 남고, $\frac{\pi}{2}$에서는 인수 $\cos^m x$ 때문에 경계항이 사라진다.

(문제지에 인쇄된 공식에는 $-\cos^m \cos nx$로 되어 있는데, $-\cos^m x \cos nx$가 맞다.)

풀이

점화 공식

곱의 미분법(product rule)으로 $\cos^m x \cos nx$를 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos^m x \cos nx) = -m\cos^{m-1} x \sin x \cos nx - n\cos^m x \sin nx.$$

첫째 항은 아직 원하는 꼴이 아니다. 덧셈정리

$$\sin(n-1)x = \sin nx \cos x - \cos nx \sin x \quad \text{로부터} \quad \sin x \cos nx = \cos x \sin nx - \sin(n-1)x.$$

를 얻는다. 이를 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos^m x \cos nx) &= -m\cos^m x \sin nx + m\cos^{m-1} x \sin(n-1)x - n\cos^m x \sin nx \\ &= -(m+n)\cos^m x \sin nx + m\cos^{m-1} x \sin(n-1)x.\end{aligned}$$

이다. 양변을 적분하면 ($m-1, n-1$이 음이 아니어야 하므로 $m \geq 1, n \geq 1$이 필요하다)

$$\cos^m x \cos nx = -(m+n)I_{m,n} + mI_{m-1,n-1},$$

즉

$$(m+n)I_{m,n} = -\cos^m x \cos nx + mI_{m-1,n-1},$$

이고, 이것이 구하려던 식이다 (늘 그렇듯 적분상수(arbitrary constant)는 부정적분(indefinite integral) 속에 흡수된 것으로 본다).

소문항 (i)

$J_{m,n} = \int_0^\pi \cos^m x \sin nx \,\mathrm{d}x$라 하자. 이 공식을 0부터 π까지 적용하고 $\cos^m \pi \cos n\pi = (-1)^m(-1)^n$임을 이용하면, $m, n \geq 1$일 때

$$(m+n)J_{m,n} = 1 - (-1)^{m+n} + mJ_{m-1,n-1}.$$

이다. m과 n의 홀짝이 같으면 $m+n$이 짝수이므로 경계항이 사라지고

$$J_{m,n} = \frac{m}{m+n} J_{m-1,n-1}.$$

이 된다. 게다가 $m-1$과 $n-1$도 홀짝이 같으므로 이 과정을 계속할 수 있다.

? **생각해 보기** 이 점화 과정은 어디에서 멈추며, 그곳에서의 값은 왜 0인가?

한 단계마다 두 첨자가 모두 1씩 줄어들므로, $\min(m,n)$단계가 지나면 한 첨자는 0이 되고, 홀짝이 같은 나머지 첨자는 짝수가 된다. 따라서 모든 짝수 $k \geq 0$에 대하여 $J_{k,0} = 0$이고 $J_{0,k} = 0$임을 보이면 충분하다.

- 피적분함수가 항상 0이므로 $J_{k,0} = \int_0^\pi \cos^k x \sin 0 \,\mathrm{d}x = 0$이다.
- 짝수 $k \geq 2$에 대하여 $J_{0,k} = \int_0^\pi \sin kx \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_0^\pi = \frac{1}{k}\left(1-(-1)^k\right) = 0$이다.

그러므로 $\min(m,n)$에 대한 수학적 귀납법(induction)에 의하여, m, n이 모두 짝수이거나 모두 홀수이면 $J_{m,n} = 0$이다.

다른 방법: $x = \pi - t$로 치환하면 $\cos^m x$는 $(-1)^m \cos^m t$로, $\sin nx$는 $-(-1)^n \sin nt$로 바뀌므로 $J_{m,n} = (-1)^{m+n+1} J_{m,n}$이고, 따라서 $m+n$이 짝수이면 $J_{m,n} = 0$일 수밖에 없다. 피적분함수가 $x = \frac{\pi}{2}$에 대하여 반대칭(antisymmetric)인 것이다.

소문항 (ii)

코사인이 나타나도록 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$로 쓰면

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin 3x \,\mathrm{d}x = K_{0,3} - K_{2,3}, \qquad K_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin nx \,\mathrm{d}x.$$

이다. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$이므로, $m \geq 1$일 때 경계항은 $-\left[\cos^m x \cos nx\right]_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1$이다. 따라서

$$(m+n)K_{m,n} = 1 + mK_{m-1,n-1} \qquad (m,n \geq 1).$$

$K_{0,1} = \int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x = 1$에서 시작하면

$$3K_{1,2} = 1 + K_{0,1} = 2, \qquad K_{1,2} = \tfrac{2}{3},$$
$$5K_{2,3} = 1 + 2K_{1,2} = \tfrac{7}{3}, \qquad K_{2,3} = \tfrac{7}{15}.$$

이다. 또 $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$이므로 $K_{0,3} = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$이다. 그러므로

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin 3x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{7}{15} = -\frac{2}{15}.$$

검산

소문항 (ii)는 곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formulae)으로 직접 계산할 수도 있다. $\sin^2 x \sin 3x = \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{4}(\sin 5x + \sin x)$이고, 이를 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 적분하면 $\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} + 1\right) = -\frac{2}{15}$이다. 음의 부호도 그럴듯하다. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$에서 $\sin 3x < 0$인데, 바로 이 구간에서 $\sin^2 x$가 가장 크기 때문이다. 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 -0.133333이 나오며, 여러 m, n에 대하여 점화 공식과 소문항 (i)을 수치적으로 확인할 수도 있다.

흔한 실수

- (ii)에서 $x = \frac{\pi}{2} - t$로 치환하려는 것: 이렇게 하면 $\sin^2 x$는 $\cos^2 t$가 되지만 $\sin 3x$는 $-\cos 3t$가 되므로, 적분이 $I_{m,n}$ 꼴이 되지 않는다.
- 점화 공식이 $m, n \geq 1$일 때만 성립한다는 것을 잊는 것: 그래서 (i)의 연쇄에는 첨자가 0인 경우를 따로 다루는 출발 단계가 필요하다.

STEP 너머

이와 같은 점화 공식은 더 큰 이야기의 출발점이다. 한 주기 전체에 걸친 삼각함수 곱의 적분은 푸리에 급수(Fourier series)의 바탕이 되는 직교 관계(orthogonality relations)이며, 푸리에 급수에서는 (i)에서와 같은 대칭성 논법으로 어떤 계수가 0이 되는지를 한눈에 판단한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에는 푸리에 급수와 이를 이용한 미분방정식 풀이에 대한 읽기 쉬운 입문이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.