풀이

STEP III 1987, 문제 15

확률과 통계 • 기대 비용의 최적화

STEP III 1987, 15번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s3-q15

핵심 아이디어

E_n을 직접 최소화하기보다, 검사를 한 번 더 했을 때 무엇이 달라지는지 살펴본다. "n번 후 멈추기"와 "$n+1$번 후 멈추기"라는 두 전략의 비교는 지금까지 n번 연속 양성 결과를 받은 환자에게만 의미가 있다. 이런 환자에게 추가 검사는 £10의 비용이 들지만, 검사 결과가 음성으로 나오는 스텝 증후군(Steppe syndrome) 환자에게는 £100의 치료비를 아껴 준다. 따라서 $E_{n+1} - E_n$의 부호가 모든 것을 결정하며, 그 부호는 많아야 한 번 바뀐다.

풀이

환자가 펜랜드 열병(Fenland fever)에 걸린 사건을 F라 하면 $\mathrm{P}(F) = p$이고, 스텝 증후군을 $S = F'$이라 하자. 스텝 증후군 환자의 검사 결과들은 서로 독립(independent)이며, 각각 확률 q로 양성이라고 가정한다. 여기서 $0 < q < 1$이다. 치료비는 누가 받든 £100이다.

소문항 (i)

E_n 구하기. 환자가 F이면 모든 검사가 양성이다. 따라서 n번의 검사를 모두 받은 뒤 치료를 받으며, 비용은 $10n + 100$이다.

환자가 S이면, k번째 검사($1 \le k \le n$)는 처음 $k-1$번의 검사가 모두 양성일 때만 시행되며, 그 확률은 q^{k-1}이다. 따라서 검사 횟수의 기댓값(expected value)은

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

이고, 환자는 n번의 검사가 모두 양성일 때만 치료를 받으며 그 확률은 q^n이다. 기댓값의 선

형성(linearity of expectation)에 의해

$$E_n = p\,(10n + 100) + (1 - p)\left(\frac{10(1 - q^n)}{1 - q} + 100q^n\right).$$

이 식에서 $E_0 = 100$도 얻는데, 이때는 모두가 치료를 받으므로 당연한 결과이다.

차. F 부분은 10만큼 증가한다. S 부분에서는 $\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = q^n$이므로

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= 10p + (1 - p)(10q^n + 100q^{n+1} - 100q^n) \\ &= 10p + 10(1 - p)q^n(1 + 10q - 10) \\ &= 10p - 10(1 - p)q^n(9 - 10q), \end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

결과의 해석: 확률 p로 $n + 1$번째 검사는 열병 환자에게 낭비된다. 확률 $(1 - p)q^n$으로 이 검사는 스텝 증후군 환자에게 시행되어 £10이 들지만, 확률 $1 - q$로 £100을 아껴 준다. 순 기대 절감액은 $100(1 - q) - 10 = 10(9 - 10q)$이다.

수치 계산. $D_n = E_{n+1} - E_n$이라 하자. $p = 10^{-4}$, $q = 10^{-2}$이면 $9 - 10q = 8.9$, $1 - p = 0.9999$이므로

$$D_n = 10^{-3} - 89 \times 0.9999 \times 10^{-2n}.$$

? **생각해 보기** 왜 D_n의 부호가 바뀌는 곳만 찾으면 충분한가?

여기서 $9 - 10q > 0$이고 n이 커질수록 q^n은 순감소하므로, D_n은 n에 대해 순증가한다. 따라서 수열 E_n은 $D_n < 0$인 동안 감소하고 $D_n > 0$이 되면 증가하므로, 최솟값은 $D_n > 0$인 첫 번째 n에서 나타난다. 이제

$$\begin{aligned} D_2 &= 10^{-3} - 0.0088991 < 0, \\ D_3 &= 10^{-3} - 0.000088991 = 0.000911\ldots > 0. \end{aligned}$$

따라서 $E_0 > E_1 > E_2 > E_3$이고 $E_3 < E_4 < E_5 < \cdots$이므로, 의사는 $n = 3$을 택해야 한다. (이때 기대 비용은 약 £10.11로, 곧바로 치료할 때의 £100과 대비된다.)

소문항 (ii)

$q_0 = \frac{9}{10}$으로 잡고, $q > \frac{9}{10}$이라 하자. 그러면 $9 - 10q < 0$이므로

$$D_n = 10p + 10(1 - p)q^n(10q - 9).$$

모든 $p \in [0, 1]$에 대해 두 항은 모두 음이 아니다. 두 항이 동시에 0일 수는 없다. $p > 0$이면 첫째 항이 양수이고, $p = 0$이면 둘째 항이 $10q^n(10q - 9) > 0$이기 때문이다. 따라서 모든 $n \geq 0$에 대해 $D_n > 0$이며, 이는

$$E_0 < E_1 < E_2 < \cdots.$$

을 뜻한다. p의 값에 관계없이 의사는 $n = 0$을 택하여 곧바로 치료해야 한다.

이 q_0의 값은 더 낮출 수 없다. $q < \frac{9}{10}$이면 $D_0 = 10p - 10(1-p)(9-10q)$는 p가 충분히 작을 때 음수이므로, 적어도 한 번 검사하는 것이 $n = 0$보다 낫다. 말로 풀면, $q > \frac{9}{10}$일 때 스텝 증후군 환자의 검사가 음성으로 나오는 것은 열 번에 한 번보다 드물므로, £10짜리 검사는 열병 환자를 고려하기도 전에 이미 평균적으로 £10보다 적은 치료비를 아껴 줄 뿐이다.

검산

- $n = 1$을 직접 계산하면 $E_1 = 10 + 100\big(p + (1-p)q\big)$이다. $p = 0$이면 $E_1 - E_0 = 10 - 100(1-q)$가 되어, 공식의 $-10q^0(9-10q)$와 일치한다.
- $p = 10^{-4}$, $q = 10^{-2}$일 때 공식은 $E_0 = 100$, $E_1 \approx 11.010$, $E_2 \approx 10.1210$, $E_3 \approx 10.11309$, $E_4 \approx 10.11400$을 준다. 앞에서 구한 대로 최솟값은 $n = 3$에서 나타난다.
- 분수를 이용한 정확한 전수 계산으로 수백 개의 무작위 (p, q)와 $n \leq 8$에 대해 E_n의 공식과 차에 대한 항등식을 확인했으며, $p = 0.3$, $q = 0.5$, $n = 2$로 한 시뮬레이션에서는 평균 비용이 63.98로, 정확한 값 64와 대비된다.

흔한 실수

- 스텝 증후군 환자에게 n번의 검사 비용을 모두 부과하는 것. 이 과정은 첫 음성 결과에서 멈추므로, k번째 검사는 확률 q^{k-1}로만 시행된다.
- D_n이 단조(monotonic)인 이유를 말하지 않고 $D_n > 0$인 첫 번째 n을 찾는 것. 그 근거가 없으면 수열 E_n이 원리적으로 나중에 다시 감소할 수도 있다.
- 소문항 (ii)에서 $p = 0$인 경우를 빠뜨리는 것. 이 경우 때문에 조건이 $q \geq q_0$이 아니라 $q > q_0$이다. $q = \frac{9}{10}$이고 $p = 0$이면 모든 E_n이 100과 같다.

STEP 너머

이것은 **최적 정지**(*optimal stopping*)와 결정 이론(decision theory)의 작은 예이다. 비용이 드는 일련의 행동, 확률적인 상태, 그리고 언제 멈출지에 대한 규칙이 있다. 이웃한 전략들을 비교하고("한계 분석(marginal analysis)") 그 차의 부호가 한 번만 바뀜을 보이는 것이 이런 문제를 다루는 표준적인 방법이다. 이러한 아이디어는 베이즈 결정 이론(Bayesian decision theory)과 동적 계획법(dynamic programming)으로 이어진다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 그 바탕이 되는 조건부 기댓값(conditional expectation)의 도구들을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.