풀이

STEP III 1987, 문제 14

역학 • 중력 붕괴

STEP III 1987, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s3-q14

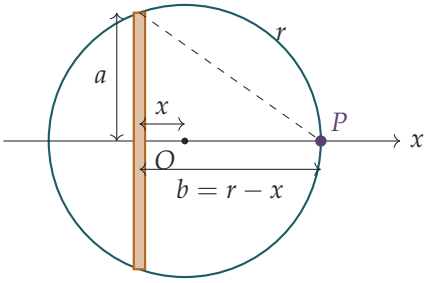
핵심 아이디어

속이 찬 구(solid sphere)는 얇은 원판(disc)을 쌓아 놓은 것이므로, 구 전체가 작용하는 힘은 입자를 지나는 축을 따라 주어진 원판 공식을 적분(integral)한 것이다. 제곱근은 다루기 까다로워 보이지만, 입자가 표면 위에 있으면 제곱근 안의 식이 인수분해(factorise)된다는 것을 알아차리면 쉬워진다. 그다음 구름에 관한 문제는 연쇄법칙(chain rule) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$을 곁들인 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)이고, 치환(substitution) $r = R\cos^2\alpha$는 두 번째로 적분할 때 나타나는 제곱근을 깔끔하게 정리하도록 고안된 것이다.

풀이

구의 표면에서의 힘

구의 중심을 원점에, 입자 P를 x축 위의 $x = r$에 둔다. 구를 축에 수직인 원판들로 자른다. 위치 x(단, $-r \leq x \leq r$)에서의 조각은 두께가 δx, 반지름이 a이고 $a^2 = r^2 - x^2$이며, P로부터 거리 $b = r - x \geq 0$만큼 떨어져 있고 P는 그 축 위에 있다.



핵심이 되는 간단해지는 부분은 제곱근 안에 있다.

$$a^2 + b^2 = (r^2 - x^2) + (r - x)^2 = 2r^2 - 2rx = 2r(r - x),$$

따라서

$$\frac{b}{(a^2 + b^2)^{1/2}} = \frac{r - x}{\sqrt{2r(r - x)}} = \sqrt{\frac{r - x}{2r}}.$$

각 원판은 P를 축을 따라 중심 쪽으로 끌어당기므로, 힘들은 모두 같은 방향으로 작용하고 그냥 더하면 된다. $\delta x \to 0$으로 보내면 전체 힘은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F &= 2\pi mk\rho \int_{-r}^{r} \left(1 - \sqrt{\frac{r - x}{2r}}\right) \mathrm{d}x \\ &= 2\pi mk\rho \left(2r - \frac{1}{\sqrt{2r}} \int_0^{2r} u^{1/2} \, \mathrm{d}u\right) \qquad (u = r - x) \\ &= 2\pi mk\rho \left(2r - \frac{1}{\sqrt{2r}} \cdot \tfrac{2}{3}(2r)^{3/2}\right) = 2\pi mk\rho \left(2r - \tfrac{4}{3}r\right) = \tfrac{4}{3}\pi mk\rho \, r. \end{aligned}$$

구의 질량은 $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$이므로 $\frac{4}{3}\pi\rho = M/r^3$이고

$$F = \frac{kmM}{r^2},$$

이며, 방향은 중심 쪽이다. 이것이 보여야 할 결과이다.

구름의 운동 방정식

구름의 입자들을 질량이 M인 연속적이고 균일한 구로 모형화하고, 그 표면 위에서 중심으로부터 거리 r에 있는 질량 m인 입자를 생각한다. 앞의 결과에 의해 이 입자에 작용하는 힘은 중심 쪽으로 향하는 kmM/r^2뿐이다. r를 좌표(바깥쪽이 양의 방향)로 잡으면 뉴턴의 제2법칙에 의해

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{kmM}{r^2}.$$

이제 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v$이므로 $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$이고, 연쇄법칙에 의해

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}.$$

따라서 $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$이고, m을 약분하면

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{kM}{r^2}.$$

생각해 보기 원판에 관한 결과는 고정된 구에 대한 것이었다. 왜 수축하고 있는 구름에도 이 결과를 쓸 수 있을까?

어느 순간의 힘은 그 순간 질량이 어디에 있는지에만 의존하므로, 구름이 표면 안쪽에 같은 질량 M을 가진 균일한 구로 유지되기만 하면 된다. 실제로 그렇다. 반지름 λR(단, $0 < \lambda \leq 1$)에서 정지 상태로 출발하는 입자는 그 안쪽에 질량 $\lambda^3 M$을 가지며, $r(t)$가 $\ddot{r} = -kM/r^2$을 만족하면 언제나 $\lambda r(t)$는 $\ddot{s} = -k\lambda^3 M/s^2$을 만족한다. 그러므로 모든 입자는 표면 반지름에 대해 같은 비율의 위치에 머문다. 즉 구름은 균일한 배율로 줄어들고, 균일한 상태를 유지하며, 어떤 입자도 표면의 입자를 앞지르지 않는다. (입자 바깥쪽의 질량은 내부 입자에 대해서만 문제가 되는데, 표면 바깥에는 아무 질량도 없다.)

정지 상태에서의 붕괴

변수를 분리(separate the variables)하여 $v = 0$인 $r = R$에서부터 적분한다.

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \int_R^r -\frac{kM}{s^2}\,\mathrm{d}s = kM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{kM(R-r)}{rR}.$$

가속도(acceleration)는 항상 안쪽을 향하고 구름은 정지 상태에서 출발하므로, r는 감소하고 전 과정에서 $v \geq 0$이다.

이제 $r = R\cos^2\alpha$로 치환하는데, r가 R에서 0 쪽으로 감소함에 따라 α는 $t = 0$일 때의 0에서 $\frac{\pi}{2}$ 쪽으로 증가한다. 그러면 $R - r = R\sin^2\alpha$이므로

$$v^2 = \frac{2kM\,R\sin^2\alpha}{R^2\cos^2\alpha} = \frac{2kM}{R}\tan^2\alpha, \qquad v = \left(\frac{2kM}{R}\right)^{1/2}\tan\alpha,$$

이다. 여기서 $v \geq 0$이고 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$에서 $\tan\alpha \geq 0$이므로 양의 제곱근을 택했다.

? **생각해 보기** α의 함수로서의 v에서 α의 함수로서의 t로 어떻게 넘어갈 수 있을까?

$v = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$와 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = -2R\cos\alpha\sin\alpha$를 이용한다.

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2R\sin\alpha\cos\alpha}{(2kM/R)^{1/2}\tan\alpha} = \left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2} 2\cos^2\alpha = \left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2}(1+\cos 2\alpha).$$

$\alpha = 0$일 때 $t = 0$이라는 조건으로 적분하면

$$t = \left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2}\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right),$$

이고, 이것이 $r = R\cos^2\alpha$가 되는 시각이다. 이것이 보여야 할 결과이다.

검산

- 짧은 시간: α가 작으면 $t \approx 2\alpha(R^3/2kM)^{1/2}$이고 $R - r \approx R\alpha^2$이므로 $R - r \approx \frac{1}{2}(kM/R^2)\,t^2$이다. 이는 정지 상태에서 출발한 일정한 가속도 kM/R^2의 운동으로, 처음에 예상되는 바와 정확히 일치한다.

- $\alpha \to \frac{\pi}{2}$로 보내면 전체 붕괴 시간 $\frac{\pi}{2}(R^3/2kM)^{1/2}$을 얻는데, $v \to \infty$임에도 이 값은 유한하다.
- 수치적으로, 얇은 원판 200 000개를 더하면 상대오차(relative error) 약 2×10^{-9}로 kmM/r^2이 재현된다. $k = 1.7$, $M = 2.3$, $R = 1.9$로 놓고 $\ddot{r} = -kM/r^2$을 $\alpha = 0.8$이 주는 시각까지 단계적으로 계산하면 $r = 0.922260$을 얻으며, 이는 $R\cos^2 0.8 = 0.922260$과 일치한다.

흔한 실수

- b를 입자로부터가 아니라 구의 중심으로부터 재는 것: $b = r - x$이지 x가 아니다.
- v가 **안쪽으로 향하는** 속력이라는 것을 잊는 것. 이 때문에 $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$에서 부호가 바뀐다.
- v에 대해 음의 제곱근을 택하는 것. 그러면 시간이 음수로 나온다.

STEP 너머

첫 번째 부분은 뉴턴(Newton)의 껍질 정리(shell theorem)의 특수한 경우이다. 구면 대칭인 물체의 바깥에서 중력은 마치 모든 질량이 중심에 있는 것처럼 작용한다. 대학 과정에서는 이를 가우스(Gauss)의 중력 법칙(Gauss's law for gravity) $\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$로 깔끔하게 증명한다. 여러분이 구한 붕괴 시간은 천체물리학자들이 말하는 **자유낙하 시간**(free-fall time)으로, 가스 구름이 얼마나 빨리 붕괴하여 별을 형성하는지 어림하는 데 쓰인다. 또한 α를 이용한 매개화(parametrisation)는 직선형 케플러(Kepler) 궤도를 기술하는 것과 같은 매개화이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 중심력(central forces)과 껍질 정리를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.