풀이

STEP III 1987, 문제 13

역학 • 마찰이 있는 회전 막대

STEP III 1987, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s3-q13

핵심 아이디어

입자가 막대를 붙잡고 있는 동안에는 막대와 입자가 하나의 강체(rigid body)처럼 경첩(hinge)을 중심으로 함께 회전하므로, 합친 관성 모멘트(moment of inertia)를 써서 에너지 보존(conservation of energy)을 적용하면 곧바로 $\dot{\theta}^2$를 얻는다. 미끄러짐(slipping)이 언제 시작되는지 알아내려면 입자만 따로 살펴본다. 입자는 경첩을 중심으로 원운동을 하므로, 지름 방향(radial)과 횡 방향(transverse)으로 뉴턴(Newton)의 제2법칙(second law)을 적용하면 막대가 공급해야 하는 마찰력(friction)과 수직 항력(normal reaction)의 크기를 정확히 알 수 있다. 필요한 마찰력이 수직 항력의 $\frac{1}{2}$에 이르는 순간 미끄러짐이 시작된다.

풀이

운동 방정식

막대를 매끄러운 경첩 O를 중심으로 회전하는 균일한 강체 막대로, 입자를 O로부터 거리 a에 있는 질점으로 모형화한다. 입자가 미끄러지기 전까지 입자는 O로부터 거리 a에 머물며 막대와 함께 회전한다.

O에 대한 계의 관성 모멘트는

$$I = \tfrac{4}{3}(3m)a^2 + ma^2 = 4ma^2 + ma^2 = 5ma^2,$$

이다. 여기서 길이가 $2l$인 균일한 막대의 한쪽 끝에 대한 관성 모멘트 $\frac{4}{3}Ml^2$를 사용하였다.

경첩은 매끄럽고, 입자와 막대 사이의 마찰력과 수직 항력은 계의 내력이므로 알짜 일을 하지 않는다. 막대가 θ만큼 회전했을 때, 막대의 중심과 입자(둘 다 O로부터 거리 a)는 각각

$a\sin\theta$만큼 내려간다. 정지 상태에서 출발하므로 에너지 보존에 의해

$$\tfrac{1}{2}(5ma^2)\dot{\theta}^2 = 3mg\,a\sin\theta + mg\,a\sin\theta = 4mga\sin\theta,$$

즉

$$5a\dot{\theta}^2 = 8g\sin\theta,$$

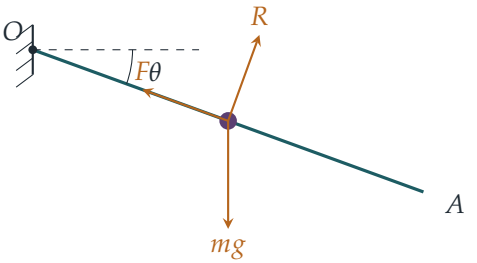
이고, 이것이 구하려던 식이다. 양변을 t에 대해 미분하면 $10a\dot{\theta}\ddot{\theta} = 8g\cos\theta\,\dot{\theta}$이므로 ($\dot{\theta} \neq 0$일 때, 이는 운동이 시작된 뒤에는 성립한다)

$$a\ddot{\theta} = \tfrac{4}{5}g\cos\theta.$$

이다. (O에 대한 모멘트(moment)를 취해도 같은 결과를 얻는다: $5ma^2\ddot{\theta} = 4mga\cos\theta$.)

입자가 미끄러지는 시점

이제 입자만 따로 생각한다. 입자에 작용하는 힘은 무게 mg, 막대에 수직인 수직 항력 R, 막대를 따라 작용하는 마찰력 F이다. 입자는 O를 중심으로 반지름 a인 원 위를 움직이므로, 입자의 가속도는 막대를 따라 O **쪽으로** 향하는 성분 $a\dot{\theta}^2$와 막대에 수직이고 θ가 증가하는 방향인 성분 $a\ddot{\theta}$를 가진다.



F는 막대를 따라 O 쪽으로 작용한다고 잡는데, 나중에 보듯이 입자에게 필요한 방향이 바로 이 방향이다. O 쪽을 양의 방향으로 하여 막대 방향으로 힘을 분해하면, 무게는 O에서 **멀어지는** 방향으로 성분 $mg\sin\theta$를 가지므로

$$F - mg\sin\theta = ma\dot{\theta}^2 = \tfrac{8}{5}mg\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad F = \tfrac{13}{5}mg\sin\theta.$$

이다. θ가 증가하는 방향(막대에서 아래쪽)을 양의 방향으로 하여 막대에 수직인 방향으로 힘을 분해하면, 무게의 성분은 $mg\cos\theta$이므로

$$mg\cos\theta - R = ma\ddot{\theta} = \tfrac{4}{5}mg\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad R = \tfrac{1}{5}mg\cos\theta.$$

이다.

생각해 보기 중력은 입자를 비탈 아래로 끌어당기는 것처럼 보이는데, 왜 입자에게는 경첩 쪽으로 향하는 마찰력이 필요할까?

중력만의 문제가 아니다. O를 중심으로 원운동을 계속하려면 입자에게는 O 쪽으로 향하는 알짜힘 $ma\dot{\theta}^2$가 필요하다. 막대 방향의 중력 성분은 반대쪽, 즉 O에서 멀어지는 쪽을 향하므로, 마찰력은 구심력(centripetal force)과 중력 성분을 상쇄하는 힘을 모두 제공해야 한다. 그래서 F는 O 쪽으로 양수가 되고 $\sin\theta$처럼 커지는 반면, R은 막대가 입자 아래에서 "떨어져 나가고" 있기 때문에 작다($\theta = 0$에서 입자의 가속도는 아래쪽으로 $\frac{4}{5}g$이므로, 막대는 입자 무게의 $\frac{1}{5}$만 떠받친다).

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 F와 R이 모두 양수이므로 입자는 막대와 접촉한 상태를 유지한다. 입자는 $F \le \frac{1}{2}R$인 동안, 즉

$$\tfrac{13}{5}mg\sin\theta \le \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}mg\cos\theta \iff \tan\theta \le \tfrac{1}{26}.$$

인 동안 막대에 대해 정지해 있다. $\theta = 0$에서 $F = 0 < \frac{1}{2}R$이고 $F/R = 13\tan\theta$는 θ에 대해 증가하므로, 입자가 처음으로 (경첩에서 멀어지는 바깥쪽으로) 미끄러지기 시작하는 것은

$$\tan\theta = \tfrac{1}{26},$$

일 때이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $\theta = 0$에서 모멘트 방정식은 각가속도 $\frac{4g}{5a}$를 준다. 따라서 입자의 가속도는 g보다 작은 $\frac{4}{5}g$이고, $R = \frac{1}{5}mg > 0$과 모순이 없다.
- 강체 운동을 수치적으로 단계별 계산하면($g = 9.81$, $a = 0.7$) $5a\dot{\theta}^2 = 8g\sin\theta$가 10^{-12} 이내로 재현되었고, 계산된 입자의 가속도로부터 직접 구한 마찰력과 수직 항력은 $\frac{13}{5}mg\sin\theta$ 및 $\frac{1}{5}mg\cos\theta$와 일치하였다. 비 F/R는 $\theta \approx 0.03845$ rad에서 처음으로 $\frac{1}{2}$에 도달하였는데, 이는 $\arctan\frac{1}{26} \approx 2.20°$이다.

흔한 실수

- 구심력 항을 빠뜨리고 입자가 비탈 위에서 평형 상태에 있는 것처럼 힘을 분해하는 것. 이렇게 하면 각도뿐 아니라 마찰력의 방향도 틀리게 된다.
- $\frac{1}{3}(3m)(2a)^2$는 제대로 썼지만 관성 모멘트에 입자의 ma^2를 더하는 것을 잊는 것.
- 고정된 빗면에서처럼 $R = mg\cos\theta$로 잡는 것. 막대는 가속하고 있으므로 수직 항력은 훨씬 작다.

STEP 너머

이 문제는 회전 좌표계(rotating frame)에서 다루는 방법을 처음 맛보게 해 준다. 막대에서 보면 입자는 바깥쪽으로 향하는 "원심력(centrifugal force)" $ma\dot{\theta}^2$와 "오일러(Euler) 힘" $-ma\ddot{\theta}$를 느끼는데, 이 가상력(fictitious forces)이 바로 우리가 구한 항들이다. 대학 역학에서는 이를 체계적으로 전개하며, 입자가 미끄러지기 시작한 뒤에 나타나는 코리올리(Coriolis) 힘도 함께 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 회전과 비관성 좌표계(non-inertial frames)를 매우 명쾌하게 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.