풀이

STEP III 1987, 문제 12

역학 • 질량이 변하는 회전

> **STEP III 1987, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q12

핵심 아이디어

이 문제는 가변 질량(variable-mass) 문제이므로 $F = ma$(또는 그 회전 버전)를 무작정 적용할 수 없다. 안전한 방법은 기본 원리로 돌아가는 것이다. 즉 시각 t에서 회전축(pivot)에 대한 각운동량(angular momentum)과, 타 버린 연료가 조금 계를 떠난 시각 $t + \delta t$에서의 각운동량을 비교한다. 회전축은 매끄럽고 중력은 연직 방향이므로, 회전축을 지나는 연직축에 대해 모멘트(moment)를 주는 것이 없으며, 따라서 그 각운동량은 보존된다.

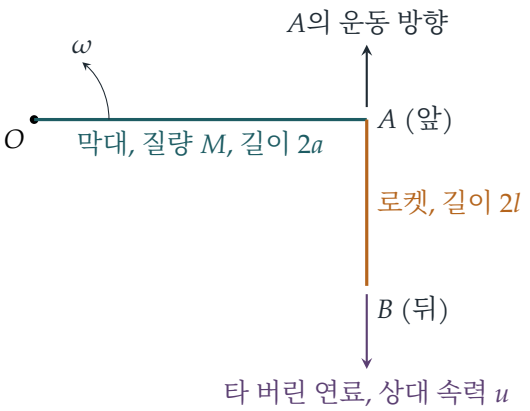
풀이

설정하기

막대와 로켓을 균일한 강체(rigid body) 막대로 모형화하고, 회전축 O를 지나는 연직축을 중심으로 수평면에서 회전한다고 하자. 막대를 OA라 하고 $OA = 2a$라 하자. OA 방향의 단위벡터 $\mathbf{e}_r$와, 이에 수직이면서 회전 방향을 향하는 단위벡터 $\mathbf{e}_\theta$를 쓰고, $\mathbf{k}$를 연직 위 방향으로 잡아 $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{k}$가 되게 한다.

로켓의 앞쪽 끝은 A에 있고, 로켓은 A의 운동 방향인 앞쪽을 향한다. 따라서 로켓은 $\mathbf{e}_\theta$ 방향으로 놓여 있으며, A에서 **뒤쪽으로** 뒤쪽 끝 B까지 뻗어 있다. 여기서

$$\overrightarrow{OB} = 2a\,\mathbf{e}_r - 2l\,\mathbf{e}_\theta.$$



관성 모멘트

끝점에 대한 막대의 관성 모멘트(moment of inertia)는 $\frac{1}{3}M(2a)^2 = \frac{4}{3}Ma^2$이다.

로켓의 중심은 $2a\,\mathbf{e}_r - l\,\mathbf{e}_\theta$에 있으며, O로부터의 거리는 $\sqrt{4a^2 + l^2}$이다. 로켓의 중심에 대한 관성 모멘트는 $\frac{1}{3}ml^2$이므로, 평행축 정리(parallel axis theorem)에 의해 로켓이 기여하는 양은 $\frac{1}{3}ml^2 + m(4a^2 + l^2)$이다. 전체는

$$I = \tfrac{4}{3}Ma^2 + m\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right).$$

I가 변하는 방식

$m = 2\alpha l$이고 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\alpha\beta$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\beta$이다. 곱의 미분법(product rule)으로 I를 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right) + m \cdot \tfrac{8}{3}l\,\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \\ &= -\alpha\beta\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right) + 2\alpha l \cdot \tfrac{8}{3}l \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\beta\right) = -\alpha\beta\,(4a^2 + 4l^2).\end{aligned}$$

$4a^2 + 4l^2 = OB^2$임에 주목하자. 관성 모멘트는 뒤쪽 끝 B에서 질량을 덜어 낼 때 얻는 비율과 정확히 같은 비율로 줄어든다. 이는 당연한데, 앞쪽 끝이 A에 고정된 채 계속 균일하게 유지되는 균일한 로켓은 뒤쪽에서만 줄어들 수 있기 때문이다.

분출된 연료의 각운동량

t에서 $t + \delta t$까지의 짧은 시간 동안 질량 $\delta\mu = \alpha\beta\,\delta t$의 타 버린 연료가 B에서 떠난다. 타기 전에 이 연료는 로켓과 함께 속도 $\mathbf{v}_B = \omega\mathbf{k} \times \overrightarrow{OB}$로 움직였다. 타고 난 뒤에는 로켓에 대해

정반대 뒤쪽으로 움직이므로 속도가 $\mathbf{v}_B - u\,\mathbf{e}_\theta$이다. 그러면 O에 대한 이 연료의 각운동량은

$$\begin{aligned}\delta\mu\,\overrightarrow{OB}\times(\mathbf{v}_B - u\,\mathbf{e}_\theta) &= \delta\mu\left[\omega\,OB^2\,\mathbf{k} - (2a\,\mathbf{e}_r - 2l\,\mathbf{e}_\theta)\times u\,\mathbf{e}_\theta\right]\\ &= \delta\mu\left[\omega(4a^2+4l^2) - 2au\right]\mathbf{k},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\mathbf{e}_\theta\times\mathbf{e}_\theta = \mathbf{0}$과, $\mathbf{k}$에 수직인 $\mathbf{r}$에 대해 성립하는 $\mathbf{r}\times(\omega\mathbf{k}\times\mathbf{r}) = \omega r^2\mathbf{k}$를 이용하였다.

> **생각해 보기** 배기 항에서 왜 $\overrightarrow{OB}$의 $2a\,\mathbf{e}_r$ 부분만 중요할까?

배기가스의 상대 속도는 로켓과 같은 직선인 $\mathbf{e}_\theta$ 방향이다. 따라서 $\overrightarrow{OB}$의 로켓 방향 성분은 모멘트를 갖지 않는다. 연료가 로켓의 어느 지점에서 떠나든, O에서 배기가스(그리고 추력(thrust))의 작용선까지의 수직 거리는 그냥 $OA = 2a$이다.

각운동량 보존

회전축은 매끄러우므로 그 반작용은 O를 지나는 연직축에 대해 모멘트를 갖지 않고, 중력은 연직 방향이므로 역시 모멘트를 갖지 않는다. 따라서 그 축에 대한 전체 계(불꽃놀이 기구와 δt 동안 타 버린 연료)의 각운동량은 t와 $t+\delta t$에서 같다.

$$I(t+\delta t)\,\omega(t+\delta t) + \delta\mu\left[\omega(4a^2+4l^2) - 2au\right] = I(t)\,\omega(t),$$

단, $(\delta t)^2$ 차수의 항은 무시한다. δt로 나누고 $\delta\mu/\delta t = \alpha\beta$를 이용하여 $\delta t\to 0$으로 보내면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) + \alpha\beta\,\omega(4a^2+4l^2) - 2\alpha\beta au = 0.$$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) = I\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$로 전개하고 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\alpha\beta(4a^2+4l^2)$을 이용하면 두 ω 항이 정확히 상쇄되어

$$I\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 2\alpha\beta au.$$

가 남는다. 이는 바로 "관성 모멘트 × 각가속도 = 추력의 모멘트"이다. 추력은 $\alpha\beta u$이고, O로부터 수직 거리 $2a$인 곳에서 로켓 방향으로 작용한다. 마지막으로

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{2\alpha\beta au}{\frac{4}{3}Ma^2 + 2\alpha l\left(4a^2+\frac{4}{3}l^2\right)} = \frac{6\alpha\beta au}{4Ma^2 + 8\alpha l(3a^2+l^2)}\\ &= \frac{3\alpha\beta au}{2\left[Ma^2 + 2\alpha l(3a^2+l^2)\right]},\end{aligned}$$

이므로 증명이 끝난다. 이 식은 연료가 남아 있는 동안, 즉 $l>0$인 동안 성립한다.

검산

- 로켓이 없으면($l\to 0$) 결과는 $\frac{4}{3}Ma^2\,\dot\omega = 2a\cdot\alpha\beta u$가 된다. 예상대로 추력 곱하기 지레팔(lever arm)이다.

- 차원(dimensions): $\alpha\beta u$는 힘이다(α는 단위 길이당 질량이고 β는 속력이다). 따라서 분자는 힘 $\times$ 길이이고, 분모는 관성 모멘트이다.
- 수치 검산: $M = 1.3$, $a = 0.7$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.4$, $u = 2.5$, $l(0) = 1.1$, $\omega(0) = 0.3$으로 두고, 뒤쪽 끝에서 작은 조각 2×10^5개를 분출시키며 매번 각운동량을 보존하는 방식으로 운동을 단계적으로 계산하였다. $t = 4.95$에서 이 계산은 $\omega \approx 2.39817$을 주었고, 공식을 적분하면 2.39816을 얻었다.

흔한 실수

- 불꽃놀이 기구만 놓고 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) =$ 토크라고 쓰는 것. 불꽃놀이 기구는 닫힌계가 아니므로, 연료가 가지고 나가는 각운동량까지 함께 고려하지 않으면 틀린 답이 나온다.
- 배기가스의 속도를 움직이는 로켓에 대한 상대 속도 u가 아니라, 뒤쪽 방향의 절대 속도 u로 두는 것.
- l이 변한다는 것을 잊어, 로켓의 관성 모멘트가 m과 l 둘 다를 통해 시간에 의존한다는 점을 놓치는 것.

STEP 너머

여기서 일어난 상쇄는 일반적인 사실이다. 국소적인 강체 속도에 상대 배기 속도를 더한 속도로 질량을 잃는 물체의 경우, 운동 방정식은 그 순간의 물체에 대한 보통의 운동 방정식에 상대 속도로부터 생기는 "추력" 힘을 더한 것이다. 이것이 로켓 방정식(rocket equation)의 회전 버전이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 가변 질량계와 각운동량을 바로 이 수준에서 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.