풀이

# STEP III 1987, 문제 11

역학 • 상대 속도의 최적화

**STEP III 1987, 11번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

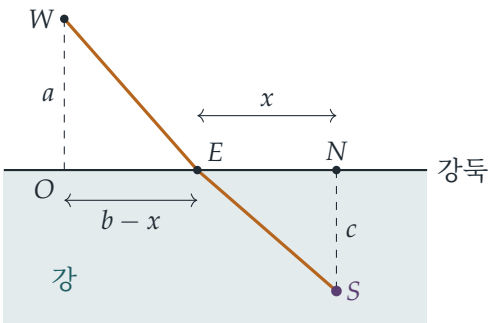
step.maths.org/questions/87-s3-q11

## 핵심 아이디어

전체 걸리는 시간을 한 변수 $x$의 함수로 나타내고, 그 도함수(derivative)를 0으로 놓는다. 물이 흐르지 않을 때 이 문제는 광학의 굴절(refraction) 문제와 똑같고, 답은 스넬의 법칙(Snell's law)이다. 물이 흐를 때 새로 해야 할 일은 수영 시간을 구하는 것뿐이다. 물살의 속도와 그녀가 헤엄치는 속도의 크기가 같으므로 두 속도의 합은 마름모(rhombus)의 대각선이 되고, 그 덕분에 수영 시간은 놀랄 만큼 간단한 $x$의 함수가 된다.

## 풀이

여자를 입자(particle)로 보고, 땅 위에서는 일정한 속력 $u$로, 물속에서는 물에 대한 일정한 속력 $v$로 각각 직선을 따라 움직인다고 모형화한다. 강둑을 $X$축으로 잡고 하류 쪽을 양의 방향으로, 들판을 $Y > 0$인 영역으로 하며, 여자의 위치를 $W = (0, a)$로 놓는다. 그러면 그루터기는 $S = (b, -c)$이고, 강둑에서 그루터기에 가장 가까운 점은 $N = (b, 0)$이며, 그녀가 강에 들어가는 점은 $E = (b - x, 0)$으로 $N$보다 $x$만큼 상류에 있다.



달리는 거리는 $WE = \sqrt{a^2 + (b-x)^2}$이고 헤엄치는 거리는 $ES = \sqrt{x^2 + c^2}$이다.

### 흐르지 않는 물

전체 시간은

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + (b-x)^2}}{u} + \frac{\sqrt{x^2 + c^2}}{v},$$

이므로

$$T'(x) = -\frac{b-x}{u\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} + \frac{x}{v\sqrt{x^2 + c^2}}.$$

함수 $s \mapsto s/\sqrt{k^2 + s^2}$는 증가함수이므로 $T'$의 두 항은 모두 $x$에 대해 증가한다. 따라서 $T'$은 순증가하고 $T$는 정확히 하나의 정류점(stationary point)을 가지며, 그것이 최솟값을 주는 점이다. $T'(0) < 0 < T'(b)$이므로 이 점은 $0 < x < b$에 있다. 구하는 방정식은

$$\boxed{\frac{b-x}{u\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} = \frac{x}{v\sqrt{x^2 + c^2}}}$$

이고, 이는 $v(b-x)\sqrt{x^2 + c^2} = ux\sqrt{a^2 + (b-x)^2}$와 동치이다. $WE$와 $ES$가 강둑의 법선과 이루는 각을 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면, 이 식은 $\dfrac{\sin\alpha}{u} = \dfrac{\sin\beta}{v}$가 되고, 이것이 바로 스넬의 굴절 법칙이다.

### 흐르는 강

이제 물이 속력 $v$로 하류로 흐르고, 그녀는 물에 대해 속력 $v$로 헤엄친다. 직선 $ES$를 따라 이동하려면, 지면에 대한 그녀의 속도가 $ES$ 방향을 향하도록 하류 방향에서 아래로 각 $\theta$만큼 기울어진 진행 방향을 골라야 한다.

**생각해 보기** 그녀는 실제로 $ES$를 따라 얼마나 빠르게 움직이는가? 그리고 왜 그루터기보다 상류에서 강에 들어가야 하는가?

지면에 대한 그녀의 속도는 물살의 속도와 그녀가 헤엄치는 속도의 합이다.

$$v\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix} = 2v\cos\tfrac{\theta}{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\-\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},$$

여기서 $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$와 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$를 이용하였다. 기하적으로 보면, 두 속도의 크기가 같으므로 두 속도는 마름모를 이루고, 그 합은 두 속도 사이의 각을 이등분한다. 따라서 지면에 대한 그녀의 경로는 하류 방향에서 아래로 각 $\phi = \theta/2$를 이룬다. $0 \le \theta \le \pi$이므로 $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$이고, 그녀는 하류 쪽으로만 떠내려갈 수 있다. 즉 그루터기는 $E$보다 하류에 있어야 하며, 이는 $x > 0$을 뜻한다. 경로가 $ES$를 따르려면

$$\tan\phi = \frac{c}{x}, \qquad \text{따라서} \qquad \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + c^2}},$$

이어야 하고, $ES$를 따라 움직이는 그녀의 속력은 $2v\cos\phi = \dfrac{2vx}{\sqrt{x^2+c^2}}$이다. 수영 시간은 거리를 속력으로 나눈 것이다.

$$\frac{\sqrt{x^2+c^2}}{2vx/\sqrt{x^2+c^2}} = \frac{x^2+c^2}{2vx}.$$

그러므로 전체 시간은

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}{u} + \frac{x^2+c^2}{2vx} = \frac{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}{u} + \frac{1}{2v}\left(x + \frac{c^2}{x}\right), \qquad x > 0,$$

이고

$$T'(x) = -\frac{b-x}{u\sqrt{a^2+(b-x)^2}} + \frac{1}{2v}\left(1 - \frac{c^2}{x^2}\right).$$

이번에도 $x > 0$에서 두 항은 모두 $x$에 대해 순증가한다. 또한 $x \to 0^+$일 때 $T'(x) \to -\infty$이고, $x$가 충분히 크면 $T'(x) > 0$이므로, 정류점은 정확히 하나이고 그 점에서 시간이 최소가 된다. $T'(x) = 0$으로 놓고 양변에 (양수인) $2vx^2u\sqrt{a^2+(b-x)^2}$를 곱하면

$$2vx^2(b-x) = u(x^2-c^2)[a^2+(b-x)^2]^{\frac{1}{2}},$$

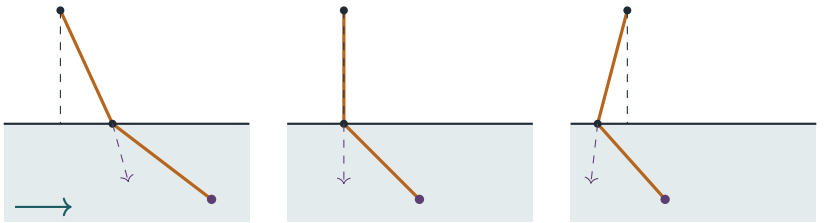
을 얻고, 이것이 구하는 식이다.

### 세 가지 그림

이 방정식을 풀지 않아도 $x$가 어디에 있는지 알 수 있다. 인수 $[a^2+(b-x)^2]^{1/2}$는 양수이므로 $b-x$와 $x-c$는 부호가 같아야 한다(또는 둘 다 0이어야 한다).

- $b > c$: 이때 $c < x < b$이다. $x \le c$이면 $b-x > 0 \ge x-c$가 되고, $x \ge b$이면 $b-x \le 0 < x-c$가 되어 둘 다 불가능하다. 그녀는 $b-x > 0$인 지점, 즉 강둑에서 자신과 가장 가까운 점 $O$보다 하류에서 강에 들어간다. $x > c$이므로 헤엄치는 경로가 강둑과 이루는 각은 $\phi < 45°$이고, 그녀의 진행 방향 $\theta = 2\phi < 90°$는 하류 쪽으로 기울어 있다.
- $b = c$: 같은 논리로 $x = c = b$이다. 그녀는 곧장 $O$로 달려가서 강을 똑바로 가로지르는 방향($\theta = 90°$)으로 헤엄치고, 물살에 실려 강둑과 45°를 이루는 경로를 따라간다.
- $b < c$: 이때 $b < x < c$이므로 $b-x < 0$이다. 그녀는 강에 들어가기 위해 **상류 쪽으로** 달리고, 45°보다 가파른 경로를 따라 헤엄치며, 그녀의 진행 방향 $\theta > 90°$는 부분적으로 상류를 향한다.

아래 그림은 $a = 3, c = 2, u = 2, v = 1$이고 $b = 4, 2, 1$인 경우를 실제 비율대로 그린 것이다. 수치로는 $x \approx 2.62$, $x = 2$, $x \approx 1.79$이다. 물살은 오른쪽으로 흐르고, $E$에서의 점선 화살표는 물에 대한 그녀의 진행 방향을 나타낸다.



$b > c$ $b = c$ $b < c$

## 검산

- $b = c$이면, 앞에서 구한 대로 $x = c$일 때 주어진 방정식의 양변이 모두 0이 된다.
- 강을 똑바로 가로질러 헤엄치는 경우($\theta = 90°$): 가로로 $v$만큼 갈 때마다 하류로 $v$만큼 떠내려가므로 경로는 45°를 이룬다. 공식에 따르면 길이가 $\sqrt{2}\,c$인 경로를 속력 $2v\cos 45° = \sqrt{2}\,v$로 가므로 걸리는 시간은 $c/v$이고, 이는 당연히 그래야 하는 값이다.
- 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 수영 시간 $(x^2 + c^2)/(2vx)$는 $x = c$일 때 가장 작다. 이는 이치에 맞는다. 달리는 데 시간이 전혀 들지 않는다면, 그녀는 $N$보다 $c$만큼 상류에서 강에 들어가 똑바로 가로지르는 방향으로 헤엄칠 것이다.
- 수치적으로, $a, b, c, u, v$를 무작위로 2000번 골라 $T$를 직접 최소화해 보았더니 최솟점은 언제나 두 방정식을 만족했고, 두 번째 경우에는 $b$와 $c$ 사이에 있었다. 물살 속에서 헤엄치는 과정을 단계별로 시뮬레이션하여 수영 시간도 확인하였다. 예를 들어 $a = 3, b = 4, c = 2, u = 2, v = 1$이면 $x \approx 2.621$이다.

## 흔한 실수

- 그녀가 그루터기를 향해 똑바로 헤엄치는 것처럼 물살의 속도를 그녀의 속력에 그냥 더하는 것. 그녀는 **합성** 속도가 그루터기를 향하도록 방향을 비껴 잡아야 한다.
- 물살이 있을 때는 $x > 0$만 가능하다는 것을 잊는 것. 두 속력이 같으므로 그녀는 상류 쪽으로 조금도 나아갈 수 없다.
- $x$에 대한 방정식을 너무 일찍 제곱하는 것. 그러면 $x$가 $b$와 $c$ 사이에 있음을 알려 주는 부호 정보를 잃게 된다.

## STEP 너머

첫 번째 답은 스넬의 법칙이며, 이는 페르마의 원리(Fermat's principle), 즉 빛은 시간이 가장 적게 걸리는 경로를 따른다는 원리에서 나온다. 시간을 최소화하도록 경로 전체를 고르

는 문제는 변분법(calculus of variations)에서 다룬다. 이와 가까운 문제로 체르멜로의 항법 문제(Zermelo's navigation problem)가 있는데, 장소에 따라 달라지는 물살 속에서 배를 조종하여 가능한 한 빨리 도착하는 문제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 속도(relative velocity)와 움직이는 좌표계를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.