풀이

STEP III 1987, 문제 10

순수수학 • 베르누이 다항식

> **STEP III 1987, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q10

핵심 아이디어

정의 규칙은 P_n을 오직 그 도함수(derivative)를 통해서만 정하므로, 귀납법(induction)을 적용할 자연스러운 대상은 차이 $P_n(x+1) - P_n(x) - nx^{n-1}$의 **도함수**이다. 귀납 가정에 의해 이 도함수는 0이 되어 상수만 남고, 적분 조건이 그 상수를 결정한다. 그다음 합은 망원급수(telescoping sum)가 되며, 세제곱의 합을 구할 때는 P_4를 상수항(constant term) 직전까지만 알면 된다. 상수항은 어차피 소거되기 때문이다.

풀이

차분 항등식

$n \geq 1$에 대하여

$$Q_n(x) = P_n(x+1) - P_n(x) - nx^{n-1}.$$

이라 하자. 모든 x에 대하여 $Q_n(x) = 0$임을 귀납법으로 증명한다.

기저 단계(base case) $n = 1$. $P_1' = 1 \cdot P_0 = 1$이므로 어떤 상수 c에 대하여 $P_1(x) = x + c$이다. 그러면 $P_1(x+1) - P_1(x) = 1 = 1 \cdot x^0$이므로 $Q_1 \equiv 0$이다. (실제로 $\int_0^1 (x+c)\,\mathrm{d}x = 0$에서 $c = -\frac{1}{2}$를 얻지만, 이 값은 필요하지 않다.)

귀납 단계(inductive step). $n \geq 2$이고 $Q_{n-1} \equiv 0$이라 가정하자. 미분하고 $P_n' = nP_{n-1}$을 이용하면

$$\begin{aligned} Q_n'(x) &= nP_{n-1}(x+1) - nP_{n-1}(x) - n(n-1)x^{n-2} \\ &= n[P_{n-1}(x+1) - P_{n-1}(x) - (n-1)x^{n-2}] \\ &= nQ_{n-1}(x) = 0. \end{aligned}$$

따라서 Q_n은 상수이고, 그 값은 $x = 0$에서의 값과 같다. $n \geq 2$이므로 항 nx^{n-1}은 $x = 0$에서 0이 되고, 따라서

$$Q_n(0) = P_n(1) - P_n(0).$$

> **생각해 보기** $P_n(1) = P_n(0)$임을 어떻게 알 수 있을까? 적분 조건은 P_n에 관한 것이지, 그 함숫값에 관한 것이 아니다.

한 단계 아래의 적분 조건을 이용한다. 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)에 의해

$$P_n(1) - P_n(0) = \int_0^1 P_n'(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^1 P_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

이다. $n - 1 \geq 1$이므로 조건 $\int_0^1 P_{n-1}\,\mathrm{d}x = 0$을 적용할 수 있기 때문이다. (바로 이 때문에 $n = 1$인 경우를 따로 다루어야 했다. $\int_0^1 P_0\,\mathrm{d}x = 1$이기 때문이다.) 따라서 $Q_n \equiv 0$이고, 이로써 귀납법이 완성된다.

$$P_n(x+1) - P_n(x) = nx^{n-1} \qquad \text{모든} n \geq 1.$$

거듭제곱의 합

항등식에 $x = m$을 대입하고 $m = 0, 1, \ldots, k$에 대하여 더한다. 우변은 망원급수가 된다.

$$\begin{aligned} n\sum_{m=0}^{k} m^{n-1} &= \sum_{m=0}^{k}[P_n(m+1) - P_n(m)] \\ &= [P_n(1) - P_n(0)] + [P_n(2) - P_n(1)] + \cdots + [P_n(k+1) - P_n(k)] \\ &= P_n(k+1) - P_n(0), \end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. ($n = 1$일 때 $m = 0$인 항은 0^0인데, 이것은 1로 읽어야 한다. 그러면 양변이 모두 $k + 1$이다.)

세제곱의 합

$n = 4$로 두면 P_4가 필요하다. $P_0 = 1$에서 시작하여 매번 적분하고, $[0, 1]$에서의 적분이 0이 되도록 상수를 고르면

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x - \tfrac{1}{2}, \\ P_2(x) &= x^2 - x + \tfrac{1}{6} && \text{왜냐하면 } \textstyle\int_0^1 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{6}, \\ P_3(x) &= x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x && \text{왜냐하면 } \textstyle\int_0^1 (x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0, \\ P_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 + c \end{aligned}$$

이다. 여기서 c는 어떤 상수이다. c는 필요하지 않다. $P_4(k+1) - P_4(0)$에서 소거되기 때문이다. $y = k+1$이라 쓰면

$$P_4(y) - P_4(0) = y^4 - 2y^3 + y^2 = y^2(y-1)^2 = (k+1)^2k^2.$$

따라서 $n = 4$일 때의 합 공식으로부터

$$\sum_{m=0}^{k} m^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

을 얻는다. $k = 1000$이면 $\frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 1001 = 500500$이므로

$$\sum_{m=0}^{1000} m^3 = (500500)^2,$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

검산

- 작은 k: $k = 2$이면 $0 + 1 + 8 = 9 = \left(\frac{2\cdot3}{2}\right)^2$이고, $k = 3$이면 $36 = 6^2$이다.
- 같은 방법을 $n = 2$에 적용하면 $2\sum m = P_2(k+1) - P_2(0) = (k+1)^2 - (k+1) = k(k+1)$이 되는데, 이것은 익숙한 삼각수(triangular number) 공식이다. 세제곱의 합이 바로 이것의 제곱이라는 점에 주목하자. 알아차리면 멋진 사실이다.
- 컴퓨터로 정확한 분수를 써서 $P_1, \ldots, P_{12}$를 만들어 보면, 임의의 유리수 점에서 차분 항등식이 성립하고 $k \leq 39$에 대하여 합 공식이 성립함을 확인할 수 있다. 세제곱을 직접 더하면 $250\,500\,250\,000 = 500500^2$이다. (건너뛰었던 상수는 $c = -\frac{1}{30}$임이 밝혀진다.)

흔한 실수

- Q_n을 $[0,1]$에서 적분하여 Q_n의 상수를 정하려는 것. 그렇게 하면 $\int_1^2 P_n$이 등장하는데, 이에 대해서는 아무것도 알지 못한다. $x = 0$에서의 값을 구하고 P_{n-1}에 대한 조건을 이용하는 편이 훨씬 깔끔하다.
- $P_n(1) = P_n(0)$을 얻는 단계에 $n \geq 2$가 필요하다는 것을 잊는 것. 그래서 기저 단계는 $n = 1$이어야 하고 직접 확인해야 한다.
- 어차피 소거되는 P_4의 상수항을 구하느라 시간을 쓰는 것.

STEP 너머

베르누이 다항식(Bernoulli polynomials)은 생성함수(generating function) $\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n\geq 0} P_n(x)\frac{t^n}{n!}$을 가지며, 0에서의 값들은 베르누이 수(Bernoulli numbers) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, \ldots$이다. 이들은 합을 적분 및 오차항과 비교하는 오일러–매클로린 공식(Euler–Maclaurin formula)의 핵심이며, 오일러(Euler)가 $\sum 1/n^{2k}$의 값을 구할 때에도 등장한다. 이러한 아이디어에 대해 더 알고 싶다면 Graham, Knuth, Patashnik의 *Concrete Mathematics*(구체 수학)를 읽어 보자. 이 책은 거듭제곱의 합과 베르누이 수를 깊이 있게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.