풀이

STEP II 1987, 문제 8

순수수학 • 3차원 벡터 자취

> **STEP II 1987, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q8

핵심 아이디어

각 방정식을 위치벡터(position vector)가 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$인 점 A, B로부터의 거리로 나타내면 그 정체가 드러난다. 동치(equivalence)를 보일 때는 모든 것을 단 두 수 $P = |\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2$와 $Q = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2$만으로 표현할 수 있다. 그러면 (i)과 (ii)는 P와 Q에 대한 간단한 일차방정식 두 개가 되고, (iii)과 (iv)도 마찬가지이다.

풀이

이 풀이 전체에서 A, B, R는 위치벡터가 각각 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{r}$인 점이고, M은 AB의 중점(midpoint)으로 위치벡터는 $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$이다. $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$라고 가정하고($\mathbf{a} = \mathbf{b}$인 경우는 마지막에 다룬다), $d = |\mathbf{a}-\mathbf{b}| = AB$로 둔다.

소문항 (i)

전개하면

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2 &= (|\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + |\mathbf{a}|^2) - (|\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{r} + |\mathbf{b}|^2) \\ &= -2\Big[(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{r} - \tfrac{1}{2}(|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2)\Big].\end{aligned}$$

따라서 (i)은 $|\mathbf{r}-\mathbf{a}| = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|$일 때, 즉 $RA = RB$일 때 정확히 성립한다. 자취(locus)는 **AB를 수직이등분하는 평면**, 곧 M을 지나고 법선벡터(normal)가 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$인 평면이다. ((i)이 $\mathbf{n} = \mathbf{a}-\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$에 대해 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} =$ 상수 꼴이므로 평면임을 바로 알 수 있고, $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$이므로 $\mathbf{r} = \mathbf{m}$은 이 식을 만족한다.)

소문항 (ii)

방정식 (ii)는 $\overrightarrow{RA}$와 $\overrightarrow{RB}$가 수직이거나, R가 A 또는 B라는 뜻이다. 자취를 알아내기 위해 완전제곱식(completing the square)을 만든다.

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}-\mathbf{m}|^2 &= |\mathbf{r}|^2 - (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{r} + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \\ &= (\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \\ &= (\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2.\end{aligned}$$

따라서 (ii)는 $|\mathbf{r}-\mathbf{m}| = \frac{1}{2}d$와 동치이다. 자취는 AB**를 지름으로 하는 구(sphere)**, 곧 중심이 M이고 반지름이 $\frac{1}{2}AB$인 구이다. 이것은 "반원에 대한 원주각은 직각이다"의 3차원 판이다.

소문항 (iii)과 (iv)

방정식 (iii)은 $RA = d/\sqrt{2}$라는 뜻이다. 그 자취는 **중심이** A**이고 반지름이** $AB/\sqrt{2}$**인 구**이다. 마찬가지로 (iv)의 자취는 **중심이** B**이고 반지름이** $AB/\sqrt{2}$**인 구**이다.

동치성

$P = |\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2$, $Q = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2$라 하자. 소문항 (i)에서 다음을 보였다.

$$\text{(i)} \iff P = Q.$$

(ii)에 대해서는 $\mathbf{a}-\mathbf{b} = (\mathbf{a}-\mathbf{r}) - (\mathbf{b}-\mathbf{r})$로 쓰고 제곱하면

$$d^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{b}-\mathbf{r}|^2 - 2(\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) = P + Q - 2(\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}).$$

따라서

$$\text{(ii)} \iff P + Q = d^2.$$

방정식 (iii)과 (iv)는 $P = \frac{1}{2}d^2$, $Q = \frac{1}{2}d^2$라는 뜻이다. 이제

$$(P = Q \text{ 그리고} P + Q = d^2) \iff P = Q = \tfrac{1}{2}d^2.$$

$Q = P$를 대입하면 $2P = d^2$가 되므로 정방향이 성립한다. 역방향은, $P = Q = \frac{1}{2}d^2$이면 당연히 $P = Q$이고 $P + Q = d^2$이다. 위의 모든 단계가 "필요충분조건"이므로, (i)과 (ii)를 함께 만족하는 것은 (iii)과 (iv)를 함께 만족하는 것과 동치이다. 이로써 증명이 끝난다.

> **생각해 보기** 평면과 구가 만나는 집합이 어떻게 두 구가 만나는 집합과 같을 수 있을까?

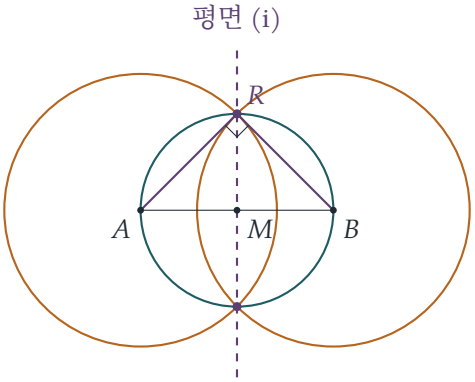
두 쌍 모두 같은 원을 나타낸다. 평면 (i)은 구 (ii)의 중심 M을 지나므로, 그 구를 대원(great circle)으로 자른다. 이 원은 중심이 M, 반지름이 $\frac{1}{2}AB$이고 AB의 수직이등분면 위에 놓인

다. 구 (iii)과 (iv)는 반지름이 $AB/\sqrt{2}$로 같고, 두 반지름의 합이 AB보다 크므로 실제로 만난다. 대칭성에 의해 두 구는 수직이등분면 위에서 중심이 M인 원으로 만난다. 삼각형 AMR에서 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 그 반지름은 $\sqrt{\frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \frac{1}{2}AB$이므로, 같은 원이다.

기하학적 의미

점 R가 이 원 위에 있을 필요충분조건은 삼각형 ARB가 R에서 직각인 **직각이등변삼각형**(*right isosceles triangle*)이라는 것이다. (i)과 (ii)의 쌍은 이를 성질로 묘사한다. 즉 $RA = RB$(이등변)이고 $\angle ARB = 90°$(직각)이다. (iii)과 (iv)의 쌍은 이를 변의 길이로 묘사한다. 빗변(hypotenuse)이 AB인 직각이등변삼각형에서 두 빗변이 아닌 변의 길이는 모두 $AB/\sqrt{2}$이다. 위의 대수적 계산은 피타고라스 정리와 그 역(converse)을 벡터로 나타낸 것이다. 항등식 $d^2 = P + Q - 2(\mathbf{a} - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{r})$은 삼각형 ARB에서의 코사인 법칙(cosine rule)이다.

아래 그림은 A와 B를 포함하는 임의의 평면에 의한 단면(cross-section)을 보여 준다. 이등분면은 점선으로, 구 (ii)는 청록색 원으로, 구 (iii)과 (iv)는 호박색 원으로 나타난다. 네 도형은 모두 해들의 원이 지면을 관통하는 두 점에서 만난다.



퇴화된 경우

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$이면 (i)은 $0 = 0$이 되어 모든 $\mathbf{r}$에 대해 성립하고, (ii), (iii), (iv)는 각각 $\mathbf{r} = \mathbf{a}$라는 뜻이 된다. 동치성은 여전히 성립하지만, 모든 자취가 한 점 A로 줄어든다((i)의 경우에는 공간 전체가 된다).

검산

$\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 0)$으로 두자. 그러면 (i)은 평면 $x = 0$이고, (ii)는 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$이다. 방정식 (iii)과 (iv)는 $(x \mp 1)^2 + y^2 + z^2 = 2$이고, 두 식을 빼면 다시 $x = 0$을 얻는

다. 네 도형은 모두 단위원 $y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$에서 만난다. 예를 들어 $R = (0, 1, 0)$이면 $RA = RB = \sqrt{2}$이고 $\overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RB} = -1 + 1 = 0$이다. 또한 위의 모든 항등식을 **a**, **b**, **r**의 무작위 선택 5000가지에 대해 유리수 연산으로 정확하게 확인하였다. 예측한 원 위의 무작위 점들이 네 방정식을 모두 만족함도 확인하였다.

흔한 실수

- (ii)를 "원"이라고 설명하는 것. 3차원에서는 구이며, (i)의 자취도 직선이 아니라 평면이다.
- 한 방향만 증명하는 것. 문제는 동치를 묻고 있으므로, 각 단계가 거꾸로도 성립하는지 확인하거나 양방향을 모두 증명해야 한다.
- 두 쌍이 "둘 다 원을 준다"고만 말하고, 그것이 **같은** 원인지, 즉 같은 평면, 같은 중심, 같은 반지름인지 확인하지 않는 것.

STEP 너머

이 자취들은 각각 **r**에 대한 이차함수의 등위집합(level set)이며, 두 구의 방정식을 빼서 평면을 얻는 기법은 두 구의 **근평면**(*radical plane*)이라는 개념이다. 더 일반적으로, 같은 기하학적 대상을 서로 다른 연립방정식으로 묘사하는 것은 대수기하학(algebraic geometry)의 출발점이다. 여기서 공간 속의 원은 두 방정식으로 잘라 낼 수 있고, 이 일을 해내는 방정식 쌍은 매우 많다. 벡터 대수, 특히 내적(dot product)과 길이, 각 사이의 관계를 탄탄히 다지려면 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.