풀이

STEP II 1987, 문제 7

순수수학 • 사다리꼴 공식과 계승

> **STEP II 1987, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q7

핵심 아이디어

간격이 1인 $\ln x$의 사다리꼴 합은 거의 정확히 $\ln n!$이다. 더하는 높이가 $\ln 1, \ln 2, \ldots, \ln n$이기 때문이다. $\ln x$는 오목(concave)하므로 모든 현(chord)이 곡선 아래에 놓이고, 따라서 사다리꼴 공식(trapezium rule)은 언제나 적분값을 **과소평가**한다. 이 한 가지 사실이 모든 부등식의 방향을 결정한다. 마지막 소문항의 요령은 촘촘한 격자에서의 오차를 크기 변환하여 다른 구간에서의 간격 1인 오차로 바꾸는 것이다. 그러면 이 오차를 $g(kn)$의 바탕에 있는 오차와 직접 비교할 수 있다.

풀이

공식의 정당화

$[x_0, x_N]$을 폭이 각각 h인 N개의 띠 $[x_r, x_{r+1}]$로 나눈다. 각 띠에서 곡선을 $(x_r, f(x_r))$와 $(x_{r+1}, f(x_{r+1}))$를 잇는 직선(현)으로 바꾼다. 현 아래의 영역은 넓이가 $\frac{1}{2}h\{f(x_r) + f(x_{r+1})\}$인 사다리꼴이다. $r = 0, 1, \ldots, N-1$에 대해 더하면, 내부의 세로좌표(ordinate) $f(x_1), \ldots, f(x_{N-1})$는 이웃한 두 사다리꼴에 한 번씩 나타나고 양 끝의 세로좌표는 각각 한 번씩 나타나므로 주어진 공식을 얻는다. h가 작으면 현이 곡선에 가깝게 유지되므로 이 근사는 정확하다.

간격 1과 $n! \approx g(n)$

$u = \ln x$, $dv = dx$로 두고 부분적분(integration by parts)하면

$$I_n = \int_1^n \ln x \, dx = \Big[x \ln x\Big]_1^n - \int_1^n 1 \, dx = n \ln n - n + 1.$$

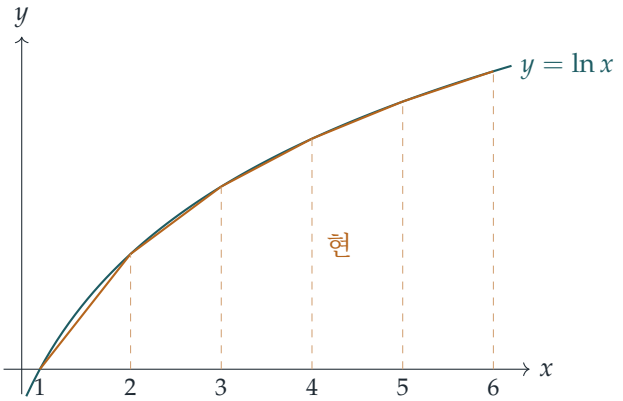
$h = 1$이면 세로좌표는 $x = 1, 2, \ldots, n$에 있으므로 사다리꼴 합은

$$\begin{aligned} T_n &= \tfrac{1}{2}\{\ln 1 + 2\ln 2 + \cdots + 2\ln(n-1) + \ln n\} \\ &= \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n - \tfrac{1}{2}\ln n = \ln n! - \tfrac{1}{2}\ln n \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\ln 1 = 0$을 이용하였다. $T_n \approx I_n$으로 놓으면

$$\ln n! \approx (n + \tfrac{1}{2})\ln n + 1 - n, \qquad \text{따라서} \qquad n! \approx n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-n} = \mathrm{g}(n).$$

$n! < \mathrm{g}(n)$인 이유



$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln x = -\dfrac{1}{x^2} < 0$이므로 곡선 $y = \ln x$는 순오목(strictly concave)하다. 즉 각 띠 $[m, m+1]$에서 현은 양 끝점을 제외하면 곡선보다 엄격히 아래에 있다(그림 참조). 따라서 각 사다리꼴의 넓이는 그 띠에서 곡선 아래 영역의 넓이보다 엄격히 작고, $n - 1 \geq 1$개의 띠를 모두 더하면

$$T_n < I_n \quad \Longrightarrow \quad \ln n! - \tfrac{1}{2}\ln n < n\ln n - n + 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln n! < \ln \mathrm{g}(n).$$

exp는 증가함수이므로 $n! < \mathrm{g}(n)$이다.

폭이 $1/k$인 띠

이제 $h = 1/k$, $N = k(n-1)$이고 $r = 0, 1, \ldots, k(n-1)$에 대해 $x_r = 1 + \frac{r}{k} = \frac{k+r}{k}$이다. 마지막 세로좌표는 $x_N = n$이다. 사다리꼴 합을 "모든 세로좌표의 합에 h를 곱한 것에서 양 끝 세로좌표의 절반씩을 뺀 것"으로 쓰고 $\ln x_0 = 0$을 이용하면

$$T_n^{(k)} = \frac{1}{k}\left\{\sum_{r=0}^{k(n-1)} \ln\frac{k+r}{k} - \tfrac{1}{2}\ln n\right\}.$$

분자 $k + r$는 $k, k+1, \ldots, kn$을 차례로 지나고, 분모에는 k가 $k(n-1)+1$개 있으므로

$$\sum_{r=0}^{k(n-1)} \ln\frac{k+r}{k} = \ln\frac{(kn)!}{(k-1)!} - \big(k(n-1)+1\big)\ln k = \ln\frac{(kn)!}{k!} - k(n-1)\ln k$$

이다. $(k-1)!\,k = k!$이기 때문이다. $kT_n^{(k)} \approx kI_n = kn\ln n - kn + k$로 놓고 정리하면

$$\begin{aligned}\ln(kn)! &\approx \ln k! + k(n-1)\ln k + \tfrac{1}{2}\ln n + kn\ln n + k(1-n)\\ &= \ln k! + \left(kn+\tfrac{1}{2}\right)\ln n + k(1-n)(1-\ln k),\end{aligned}$$

즉

$$(kn)! \approx k!\, n^{kn+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathrm{e}}{k}\right)^{k(1-n)} =: A$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

어느 쪽이 더 가까운가?

정수 $a < b$에 대해 오차 $\displaystyle\int_a^b \ln t\,\mathrm{d}t -$ (간격 1인 사다리꼴 합, 구간$[a,b]$)를 $E(a,b)$로 쓰자. 앞의 오목성 논증에 의해 $E(a,b) > 0$이고, 오차는 이웃한 구간에 대해 더해진다. 즉 $E(1,b) = E(1,a) + E(a,b)$이다.

A의 유도는 $T_n^{(k)}$을 I_n으로 바꾼 것을 제외하면 정확했으므로

$$\ln A - \ln(kn)! = k\left(I_n - T_n^{(k)}\right).$$

마찬가지로, 간격 1인 경우의 계산에서 n 대신 kn을 넣으면 $\ln \mathrm{g}(kn) - \ln(kn)! = E(1,kn)$이다.

> **생각해 보기** 폭이 $1/k$인 격자에서의 오차를 폭이 1인 격자에서의 오차와 어떻게 비교할 수 있을까?

$x = t/k$로 치환한다. 세로좌표 $x_r = (k+r)/k$는 $t = k, k+1, \ldots, kn$이 되고 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/k$이므로

$$k\left(I_n - T_n^{(k)}\right) = \int_k^{kn} \ln\frac{t}{k}\,\mathrm{d}t \;-\; \text{(간격 1인 사다리꼴 합: 함수 } \ln\tfrac{t}{k}\text{, 구간}[k,kn]).$$

$\ln\frac{t}{k} = \ln t - \ln k$이고 사다리꼴 공식은 상수 $\ln k$에 대해 정확하므로 상수는 상쇄되고, 이것은 바로 $E(k,kn)$이다. 따라서

$$\ln \mathrm{g}(kn) - \ln(kn)! = E(1,kn) = E(1,k) + E(k,kn) = E(1,k) + \left(\ln A - \ln(kn)!\right).$$

A와 $\mathrm{g}(kn)$은 모두 $(kn)!$보다 크고, $k \geq 2$이면 $E(1,k) > 0$이므로

$$(kn)! < A < \mathrm{g}(kn) \qquad (k \geq 2).$$

그러므로 새로운 근사 A는 차로 재든 비로 재든 $\mathrm{g}(kn)$보다 $(kn)!$에 더 가깝다. $k = 1$이면 $A = 1!\, n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-n} = \mathrm{g}(n)$이므로 두 값은 같다. 말로 하면, A는 처음 k개의 인수에 대해서는 **정확한** 값 $k!$을 쓰고 나머지만 근사하므로, ln이 가장 많이 휘는 곡선의 시작 부분에서 생기는 오차 $E(1,k)$를 피한다.

검산

- 최종 공식에 $k = 1$을 넣으면 당연히 $\mathrm{g}(n)$이 다시 나온다.
- $n = 5$로 두면 $5! = 120$이고 $\mathrm{g}(5) = 5^{5.5}\mathrm{e}^{-4} \approx 128.0$이므로 실제로 $n! < \mathrm{g}(n)$이다.
- $k = 3, n = 5$로 두면 $15! \approx 1.3077 \times 10^{12}$, $A \approx 1.3369 \times 10^{12}$, $\mathrm{g}(15) \approx 1.4102 \times 10^{12}$이므로 $(kn)! < A < \mathrm{g}(kn)$이 확인된다.
- 비 $\mathrm{g}(kn)/A = \exp E(1,k)$는 n이 아니라 k에만 의존한다. $k = 3$이면 이 값은 $\mathrm{g}(3)/3! \approx 1.0548$이며 위의 수치와 일치한다.

흔한 실수

- 폭이 $1/k$인 합에서 k의 개수를 잘못 세는 것. 세로좌표는 $k(n-1)+1$개이며, 추가로 생기는 $\ln k$가 $(k-1)!$을 $k!$로 바꾸어 준다.
- 현이 곡선 위에 있는 그림을 근거로 "$n! < \mathrm{g}(n)$"을 주장하는 것. 오목함수에서는 현이 아래에 있으므로 사다리꼴 공식이 과소평가한다.
- $\ln A$의 오차가 촘촘한 격자에서의 오차 자체가 아니라 그 오차의 k배라는 것을 잊는 것.

STEP 너머

여기서 $\mathrm{g}(n)$은 스털링 공식(Stirling's formula) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}$의 거친 형태이다. 오차 $E(1,n)$은 n에 대해 증가하고 위로 유계이므로(각 띠의 오차는 많아야 상수에 $1/m^2$을 곱한 값이다) 수렴(converge)하며, 이것이 $n!/\mathrm{g}(n)$이 상수 $\sqrt{2\pi}/\mathrm{e} \approx 0.922$로 수렴하는 이유이다. 오일러-매클로린 공식(Euler–Maclaurin formula)은 이를 엄밀하게 하고 완전한 점근급수(asymptotic series)를 제공한다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석 입문)는 이 내용의 바탕이 되는 리만 적분(Riemann integral)과 수치 적분 공식의 오차 추정을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.