풀이

STEP II 1987, 문제 6

순수수학 • 대칭성을 이용한 정적분

STEP II 1987, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s2-q6

핵심 아이디어

구간 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$는 대칭이므로, 반사(reflection) $\theta \mapsto -\theta$가 자연스러운 첫 수이다. 이 변환은 $\sin\theta$를 $-\sin\theta$로 바꾸고, 두 번째 형태를 공짜로 준다. 두 형태를 평균하면 홀함수 부분(odd part)이 사라지고 분모에는 $\sin^2\theta$만 남는다. 약간의 대수 계산을 거치면 이것을 상수와 표준적인 $\tan\theta$ 적분으로 나눌 수 있다. 마지막 부분의 핵심은 순진해 보이는 한 단계이다. $\sqrt{\cos^2 2\alpha}$는 $\cos 2\alpha$가 아니라 $|\cos 2\alpha|$이다.

풀이

전체에 걸쳐 $s = \sin 2\alpha$, $c = \cos 2\alpha$로 두면 $s^2 + c^2 = 1$이다. $0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$이면 $0 < s < 1$이고 $0 < c < 1$이다. $s < 1$이므로 분모 $1 \mp s\sin\theta$는 구간 전체에서 양수이고, 따라서 모든 적분은 이상적분(improper integral)이 아닌 보통의 적분이다.

I의 두 번째 형태

$\theta = -\phi$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$이고 적분의 위끝과 아래끝이 서로 바뀐다.

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2(-\phi)}{1 - \sin(-\phi)\, s}\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + s\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

여기서 $\cos(-\phi) = \cos\phi$와 $\sin(-\phi) = -\sin\phi$를 이용하였다. ϕ를 다시 θ로 바꾸어 쓰면 요구된 형태가 된다.

$\cot^2 2\alpha$를 포함하는 식

I에 대한 두 식을 더하면

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\theta \left(\frac{1}{1-s\sin\theta} + \frac{1}{1+s\sin\theta}\right) \mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\cos^2\theta}{1-s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

이므로

$$I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\theta}{1-s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

이제 $1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$와 $1 - s^2 = c^2$를 이용하여 분모를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$1 - s^2\sin^2\theta = \cos^2\theta + c^2\sin^2\theta.$$

생각해 보기 $\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta}$를 상수와 적분할 수 있는 부분의 합으로 어떻게 나눌 수 있을까?

분자를 분모의 상수배에 나머지를 더한 꼴로 쓰되, 그 나머지는 $\cos^2\theta$로 나누었을 때 θ에 의존하지 않도록 하는 것이 목표이다.

$$(\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta) - c^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (1-c^2)\cos^2\theta = s^2\cos^2\theta,$$

이므로, $s^2(\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)$로 나누면($s \neq 0$이므로 가능하다) 다음을 얻는다.

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta} = \frac{1}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta} = \frac{1}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\sec^2\theta}{1 + c^2\tan^2\theta},$$

마지막 단계에서는 분자와 분모를 $\cos^2\theta$로 나누었다. 길이가 π인 구간에서 적분하고 $c^2/s^2 = \cot^2 2\alpha$를 이용하면

$$I = \frac{\pi}{\sin^2 2\alpha} - \cot^2 2\alpha \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sec^2\theta}{1 + \cos^2 2\alpha\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

가 되어 요구된 식을 얻는다.

I의 값 구하기

남은 적분을 J라 하자. $t = \tan\theta$로 치환하면 $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$이고, θ가 $-\frac{1}{2}\pi$에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 움직일 때 t는 실수 전체를 지난다. 그러면 $c \neq 0$일 때

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + c^2t^2} = \left[\frac{1}{|c|}\arctan(|c|\,t)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{|c|}.$$

(치환 $u = |c|t$가 바로 $|c|$를 만들어 낸다. 이렇게 하면 적분 구간이 올바른 순서로 $-\infty$에서 ∞까지 유지된다.)

$0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$이면 $c > 0$이므로 $J = \pi/c$이고

$$I = \frac{\pi}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\pi}{c} = \frac{\pi(1-c)}{1-c^2} = \frac{\pi}{1+c} = \frac{\pi}{1+\cos 2\alpha} = \frac{\pi}{2\cos^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\sec^2\alpha,$$

이다. 여기서 $1-c \neq 0$으로 약분하고 $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$를 이용하였다. 이것이 요구된 결과이다.

$\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$인 경우

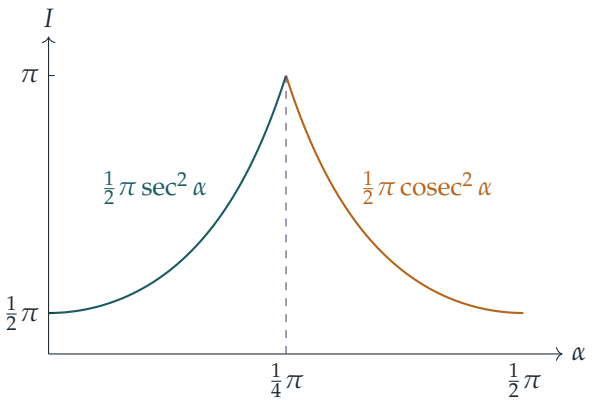
생각해 보기 α가 $\frac{1}{4}\pi$를 지날 때 논증에서 무언가 바뀌는 것이 있을까?

거의 없다. 여전히 $0 < s < 1$이므로, I를 J로 나타낸 식까지의 모든 단계는 그대로 성립한다. 유일한 차이는 이제 $c = \cos 2\alpha < 0$이라는 점이며, 따라서 $|c| = -c$이고 $J = -\pi/c$이다. 그러므로

$$I = \frac{\pi}{s^2} + \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\pi}{c} = \frac{\pi(1+c)}{1-c^2} = \frac{\pi}{1-c} = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\operatorname{cosec}^2\alpha,$$

이며, 여기서 $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$를 이용하였다. 첫 번째 답을 무심코 그대로 옮겨 쓰면 틀린 값을 얻게 된다.

α에 대한 I의 그래프를 보면 두 공식이 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$에서 만나며, 이때 둘 다 값이 π이다.



검산

- $\alpha = \frac{1}{4}\pi$에서는 $s = 1$이고 피적분함수(integrand)는 $\cos^2\theta/(1-\sin\theta) = 1+\sin\theta$이며, 이를 적분하면 π이다. 두 공식 모두 여기서 π를 주므로 예상대로이다.
- $\alpha = \frac{1}{6}\pi$에서는 $s = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $c = \frac{1}{2}$이므로 $I = \pi/(1+c) = \frac{2}{3}\pi$이고, $\frac{1}{2}\pi\sec^2\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}\pi$이다.

- $\frac{1}{4}\pi$의 양쪽에서 무작위로 고른 열 개의 α 값에 대해 원래 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면, 10^{-6}보다 작은 오차로 공식과 일치한다. 예를 들어 $\alpha \approx 0.6308$이면 두 방법 모두 $I \approx 2.408759$를 준다.
- $\alpha \to 0$이면 피적분함수는 $\cos^2\theta$로 수렴(converge)하고, 그 적분은 $\frac{1}{2}\pi$이므로 $\frac{1}{2}\pi\sec^2 0$과 일치한다.

흔한 실수

- 절댓값 없이 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+c^2t^2} = \frac{\pi}{c}$라고 쓰는 것. $c < 0$이면 이 값은 음수인데, 피적분함수가 양수이므로 이는 불가능하다.
- $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$에서 음의 부호를 빠뜨리거나, 그 부호가 적분의 위끝과 아래끝을 바꾸는 것으로 상쇄된다는 사실을 잊는 것.
- $t = \tan\theta$가 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서 정의되지 않는다고 걱정하는 것. t에 대한 적분은 이상적분이지만 수렴하며, 우리에게 필요한 것은 그것뿐이다.

STEP 너머

답에 나타나는 깔끔한 대칭 $\alpha \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi - \alpha$는 우연이 아니다. I는 오직 $\sin 2\alpha$를 통해서만 α에 의존하고 이 값은 그 교환에 의해 변하지 않지만, $\frac{1}{2}\pi\sec^2\alpha$ 같은 공식은 그렇지 않다. 제곱했다가 제곱근을 취하는 과정을 소리 없이 거치는 대수 계산은 바로 이런 종류의 문제를 감출 수 있다. 한 주기 전체에 걸친 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 유리함수의 적분(주기가 π인, 우리가 평균하여 얻은 피적분함수가 그런 예이다)은 대학에서 흔히 단위원을 따라가는 경로적분(contour integration)으로 계산하는데, 이때 유수 정리(residue theorem) 덕분에 거의 기계적인 작업이 된다. 아름답고 기하학적인 입문서로는 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.