풀이

STEP II 1987, 문제 5

순수수학 • 라그랑주 반전 급수

> **STEP II 1987, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q5

핵심 아이디어

라그랑주 항등식(Lagrange's identity)은 일종의 기계이다. 함수 $\phi(y) = y - \mathrm{f}(y)$를 넣고, 이를 n제곱한 뒤 $n-1$번 미분하여 모두 더하면 된다. 할 일은 모두 ϕ가 간단해지도록, 이상적으로는 y의 거듭제곱 하나나 지수함수 하나가 되도록 문제를 설정하는 데 있다. 그러면 ϕ^n의 $(n-1)$계 도함수(derivative)를 곧바로 적을 수 있기 때문이다. 각 소문항에서 우리는 풀어야 할 방정식이 적당한 y 값에 대해 $\mathrm{f}(x) = y$ 꼴이 되도록 f를 고른다.

풀이

풀이 전체에서 $\phi(y) = y - \mathrm{f}(y)$로 쓰면, 항등식은 다음과 같다.

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} [\phi(y)^n].$$

$n = 1$인 항에는 0계 도함수가 들어가며, 이는 그냥 $\phi(y)$ 자체임에 주의한다.

반복해서 쓰는 사실은 단 하나로, 정수 $m \geq n-1$에 대해

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} y^m = \frac{m!}{(m-n+1)!} y^{m-n+1},$$

이라는 것이다. 미분할 때마다 현재 지수가 앞으로 내려오고 지수가 하나씩 줄어들기 때문이다.

소문항 (i)

$\mathrm{f}(x) = \alpha x$이면 $\phi(y) = (1-\alpha)y$이므로 $\phi(y)^n = (1-\alpha)^n y^n$이다. 위 공식에서 $m = n$으로 두고 $n-1$번 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}}[(1-\alpha)^n y^n] = (1-\alpha)^n \, n! \, y.$$

이다. $n!$이 $\frac{1}{n!}$과 약분되므로 항등식의 우변은

$$y + \sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)^n y = y \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n.$$

이다. 이것은 공비가 $1-\alpha$인 등비급수(geometric series)이다. $0 < \alpha < 2$이므로 $-1 < 1-\alpha < 1$이고, 따라서 이 급수는 수렴(converge)하며 그 합은

$$y \cdot \frac{1}{1-(1-\alpha)} = \frac{y}{\alpha}.$$

이다. 한편 $y = \alpha x$에서 곧바로 $x = y/\alpha$를 얻으므로 $\mathrm{f}^{-1}(y) = y/\alpha$이다. 두 결과가 일치하므로, 이 경우에 항등식이 성립함을 확인했다. 조건 $0 < \alpha < 2$는 정확히 급수가 수렴할 조건이다.

소문항 (ii)

방정식은 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}$이고, 여기서

$$\mathrm{f}(x) = x - \tfrac{1}{4}x^3, \qquad \text{따라서} \qquad \phi(y) = y - \mathrm{f}(y) = \tfrac{1}{4}y^3.$$

이다. 그러면 $\phi(y)^n = 4^{-n} y^{3n}$이고, $m = 3n$($n-1$ 이상이다)으로 두고 도함수 공식을 쓰면

$$\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}}[4^{-n} y^{3n}] = \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\, y^{2n+1}.$$

이다. 따라서 라그랑주 항등식에 의해

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\, y^{2n+1}.$$

이다. 맨 앞의 y는 이 일반항에서 $n = 0$일 때 나오는 값과 정확히 같다. $\frac{0!}{0!\,1!\,4^0}\, y^1 = y$이기 때문이다. 따라서 이를 합에 흡수하여 $n = 0$부터 시작할 수 있다.

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\, y^{2n+1}.$$

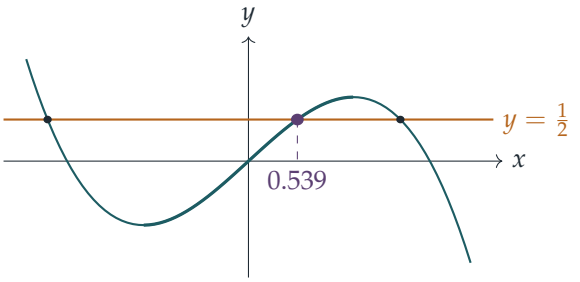
이제 $y = \frac{1}{2}$를 대입한다. 그러면 $4^n \cdot 2^{2n+1} = 2^{2n} \cdot 2^{2n+1} = 2^{4n+1}$이므로

$$x = \mathrm{f}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,2^{4n+1}},$$

이고, $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}$이므로 이 x는 요구한 대로 $\frac{1}{2} = x - \frac{1}{4}x^3$의 근이다.

생각해 보기 이 삼차방정식은 실근이 세 개이다. 급수가 나타내는 것은 그중 어느 근인가?

함수 f는 실수 전체에서 일대일(one-to-one)이 아니므로, "f^{-1}"은 급수가 나타내는 가지(branch)를 뜻한다. 이 급수는 $y + \cdots$로 시작하는 y의 멱급수(power series)이므로 $\mathrm{f}^{-1}(0) = 0$이고, 작은 y에 대해 $\mathrm{f}^{-1}(y) \approx y$이다. 이것은 원점을 지나는 증가 구간, 즉 $\mathrm{f}'(x) = 1 - \frac{3}{4}x^2 > 0$인 구간 $|x| < 2/\sqrt{3}$으로 제한한 f의 역함수이다. 처음 몇 항은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{32} + \frac{3}{512} + \cdots \approx 0.537$이고, 합은 소수점 넷째 자리까지 0.5392이다. 이것은 가장 작은 양의 근으로, 아래 그림에 표시되어 있다. 나머지 근인 약 1.675와 −2.214는 곡선의 감소하는 부분에 있다.



곡선에서 더 굵게 그린 부분이 원점을 지나는 증가하는 가지이며, 급수는 그 위의 근을 준다. 이 근은 자주색으로 표시했다.

소문항 (iii)

여기서 요령은 방정식 전체를 $\mathrm{f}(x) = y$ 꼴로 바꾸되 ϕ가 간단해지게 하는 것이다. $x = \mathrm{e}^{\lambda x}$를

$$x - \mathrm{e}^{\lambda x} = 0,$$

으로 정리하고, 다음과 같이 잡는다.

$$\mathrm{f}(x) = x - \mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad \phi(y) = y - \mathrm{f}(y) = \mathrm{e}^{\lambda y},$$

그리고 $x = \mathrm{f}^{-1}(0)$을 구하려 한다. 이제 $\phi(y)^n = \mathrm{e}^{n\lambda y}$이고, 미분할 때마다 $n\lambda$가 곱해지므로

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}}\,\mathrm{e}^{n\lambda y} = (n\lambda)^{n-1}\mathrm{e}^{n\lambda y}.$$

이다. ($n = 1$이면 이 식은 올바르게 $\mathrm{e}^{\lambda y}$가 된다.) 라그랑주 항등식에 의해

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\lambda)^{n-1}}{n!}\,\mathrm{e}^{n\lambda y},$$

이고, $y = 0$을 대입하면

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}\lambda^{n-1} = 1 + \lambda + \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{8}{3}\lambda^3 + \frac{125}{24}\lambda^4 + \cdots .$$

이다. 첨자를 옮겨 쓰면, 동치로 $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}\lambda^n$이다.

이 급수는 어떤 λ에 대해 수렴하는가? 연속한 두 항의 비는

$$\frac{(n+1)^n\lambda^n/(n+1)!}{n^{n-1}\lambda^{n-1}/n!} = \lambda\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \to \mathrm{e}\lambda,$$

이므로, 비판정법(ratio test)에 의해 급수는 $|\lambda| < 1/\mathrm{e}$일 때 수렴한다. 이것은 자연스러운 경계이다. $y = x$는 정확히 $\lambda = 1/\mathrm{e}$일 때 ($x = \mathrm{e}$에서) $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$에 접하고, $\lambda > 1/\mathrm{e}$이면 실근이 전혀 없다. $0 < \lambda < 1/\mathrm{e}$이면 양의 근이 두 개 있고, 급수는 그중 작은 근, 즉 $\lambda \to 0$일 때 1로 가는 근을 준다.

검산

- (ii)에서 처음 네 항은 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{3}{512}$, $\frac{3}{2048}$이다. 200개 항을 수치적으로 더하면 0.539189이고, $x^3 - 4x + 2 = 0$에 뉴턴 방법(Newton's method)을 적용하면 근 0.5391888…을 얻으므로, 기계 정밀도까지 일치한다.
- (iii)에서 $\lambda = 0$을 대입하면 급수는 $x = 1$을 주고, 실제로 $x = \mathrm{e}^0 = 1$이다. $\lambda = 0.2$에 대해 급수를 더하면 $x \approx 1.29586$이고, $\mathrm{e}^{0.2\times 1.29586} = 1.29586$이다. $\lambda = -0.3$이면 0.78918을 얻는데, 이 역시 방정식을 만족한다. $\lambda = 0.2$일 때 다른 근은 약 12.71로, 급수의 값과 멀리 떨어져 있다.
- (i)에서 $\alpha = 1$로 두면 $\phi = 0$이므로 합의 모든 항이 사라지고, 마땅히 그래야 하듯 $\mathrm{f}^{-1}(y) = y$가 된다.

흔한 실수

- $n = 1$인 항에는 미분이 없다는 것(0계 도함수)을 잊어서, 이 항을 빠뜨리거나 잘못 계산한다.
- (ii)에서 따로 떨어진 y가 일반항 공식의 $n = 0$ 항이라는 것을 알아차리지 못해, $n = 0$부터 시작하는 합과 맞추지 못한다.
- (iii)에서 $\mathrm{f}(x) = x\mathrm{e}^{-\lambda x}$ 같은 것을 시도한다. 틀린 방법은 아니지만, 그러면 ϕ가 두 항의 차가 되어 도함수가 엉망이 된다. $\phi = \mathrm{e}^{\lambda y}$로 고르면 도함수가 아주 간단해진다.

STEP 너머

이것은 **라그랑주 반전 정리**(Lagrange inversion theorem)로, 보통 복소해석학(complex analysis)(코시(Cauchy)의 유수 정리(residue theorem))이나 형식적 멱급수(formal power series)를 이용해 증명한다. (iii)의 계수 $(n+1)^{n-1}/n!$은 람베르트(Lambert) W 함수의 계수이고, n^{n-1}은 꼭짓점이 n개인 뿌리 있는 레이블 트리(rooted labelled tree)의 개수이다. 마찬가지로 (ii)의 수 $\frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!}$은 삼진 트리(ternary tree)의 개수로, 카탈랑 수(Catalan numbers)의 사촌 격이다. 이처럼 라그랑주 반전은 열거 조합론(enumerative combinatorics)의 핵심 도구이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*에 복소해석학적 배경이 나와 있고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 급수를 다루는 STEP 연습 문제가 더 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.