풀이

STEP II 1987, 문제 4

순수수학 • 복소수와 기하

STEP II 1987, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s2-q4

핵심 아이디어

$e^{i\theta}$를 곱하는 것은 회전(rotation)이고, 정삼각형(equilateral triangle)은 한 변을 한 꼭짓점을 중심으로 $60°$만큼 회전했을 때 얻어지는 도형이다. 이렇게 하면 기하 문제가 α, β, γ에 대한 일차방정식(linear equation)으로 바뀐다. 두 방향(orientation)을 모두 허용한다는 것은 두 일차식 **중 하나가** 0이 된다는 뜻이고, 이 두 식의 곱이 바로 문제에 나오는 대칭(symmetric) 이차식이다. 이 식은 대칭식이므로 삼차방정식(cubic)의 계수(coefficient)로 나타낼 수 있다.

풀이

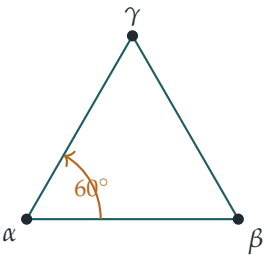
이 풀이 전체에서 $\omega = e^{2\pi i/3}$으로 두며, 따라서 $\omega^3 = 1, \bar{\omega} = \omega^2, 1 + \omega + \omega^2 = 0$이다.

$e^{i\theta}$를 곱하기

$z = re^{i\phi}$이면 $ze^{i\theta} = re^{i(\phi+\theta)}$이다. 즉 절댓값(modulus)은 변하지 않고 편각(argument)은 θ만큼 커진다. 따라서 점 $ze^{i\theta}$는 점 z를 원점을 중심으로 반시계 방향(anticlockwise)으로 각 θ만큼 회전한 상이다.

더 일반적으로, $\gamma - \alpha = e^{i\theta}(\beta - \alpha)$는 α에서 γ로 가는 벡터가 α에서 β로 가는 벡터를 반시계 방향으로 θ만큼 회전한 것임을 뜻한다. 즉 γ는 β를 α를 중심으로 θ만큼 회전한 상이다.

반시계 방향 정삼각형



서로 다른 점 α, β, γ가 반시계 방향 순서로 정삼각형을 이루는 것은 γ가 β를 α를 중심으로 반시계 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전하여 얻어질 때, 즉

$$\gamma - \alpha = e^{i\pi/3}(\beta - \alpha).$$

일 때와 정확히 같다. (필요성(necessity): 이러한 삼각형에서는 $|\alpha\gamma| = |\alpha\beta|$이고, α에서의 각은 $\alpha\beta$에서 $\alpha\gamma$로 반시계 방향으로 잰 것으로 $\frac{\pi}{3}$이다. 충분성(sufficiency): 이 식으로부터 $|\alpha\gamma| = |\alpha\beta|$이고 두 변 사이의 각이 $\frac{\pi}{3}$이므로, 삼각형은 꼭지각이 $60°$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이고 따라서 정삼각형이며, 방향은 반시계 방향이다.)

이를 대칭적인 꼴로 쓰면 더 깔끔하다. $e^{i\pi/3} = -\omega^2$이므로($e^{7\pi i/3} = e^{i\pi/3}$을 이용하면 $-\omega^2 = e^{i\pi}e^{4\pi i/3} = e^{i\pi/3}$이기 때문이다), 조건은

$$\begin{aligned} & \gamma - \alpha = -\omega^2\beta + \omega^2\alpha \\ \iff \quad & \gamma + \omega^2\beta - (1+\omega^2)\alpha = 0 \\ \iff \quad & \gamma + \omega^2\beta + \omega\alpha = 0, \end{aligned}$$

이 된다. 여기서 $1 + \omega^2 = -\omega$를 이용하였다. 양변에 ω^2를 곱하면(0이 아니므로 이 과정은 거꾸로도 할 수 있다) 동치인 조건

$$\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0.$$

을 얻는다. 간단히 확인해 보자. $1, \omega, \omega^2$는 반시계 방향 순서로 정삼각형의 꼭짓점이고, $1 + \omega \cdot \omega + \omega^2 \cdot \omega^2 = 1 + \omega^2 + \omega = 0$이다.

두 방향 모두

정삼각형을 이루는 서로 다른 세 점은 α, β, γ 순서이든 α, γ, β 순서이든 둘 중 하나로 반시계 방향이다(순환적으로 순서를 바꾸는 것(cyclic re-ordering)은 방향을 바꾸지 않는다). 앞부분에 의해, 서로 다른 α, β, γ에 대하여

$$\begin{aligned} \text{정삼각형} & \iff \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0 \text{ 또는 } \alpha + \omega\gamma + \omega^2\beta = 0 \\ & \iff (\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma) = 0. \end{aligned}$$

생각해 보기 이 곱이 우리가 원하는 식이라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

그냥 전개하면 된다. 제곱항은 $\alpha^2+\omega^3\beta^2+\omega^3\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$이 된다. 교차항은

$$\begin{aligned}\alpha\beta(\omega^2+\omega)+\alpha\gamma(\omega+\omega^2)+\beta\gamma(\omega^2+\omega^4)&=\alpha\beta(\omega+\omega^2)+\gamma\alpha(\omega+\omega^2)+\beta\gamma(\omega^2+\omega)\\&=-\alpha\beta-\gamma\alpha-\beta\gamma,\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\omega^4=\omega$와 $\omega+\omega^2=-1$을 이용하였다. 따라서

$$(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta,$$

이고, 그러므로 서로 다른 점 α,β,γ가 (어떤 순서로) 정삼각형을 이루기 위한 필요충분조건은

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta=0,$$

이며, 이것이 증명하려던 것이다.

세 점이 서로 다르다는 조건이 없으면 어떻게 되는지 짚어 둘 만하다. 예를 들어 $\alpha=\beta$이면 식은 $(\alpha-\gamma)^2$이 되고, 이는 $\gamma=\alpha$이기도 할 때만 0이 된다. 따라서 이 식이 0이 되는 것은 세 점이 정삼각형을 이루거나 **세 점이 모두 일치할 때**와 정확히 같다. 이 사실은 아래에서 필요하다.

삼차방정식

$z^3+az^2+bz+c=0$의 근을 α,β,γ라 하자. 그러면

$$\alpha+\beta+\gamma=-a,\qquad \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=b,\qquad \alpha\beta\gamma=-c.$$

이다. 주어진 식은 대칭식이므로 이것들로 나타낸다.

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)\\&=a^2-3b.\end{aligned}$$

위의 관찰에 의해, $a^2=3b$인 것은 근들이 정삼각형을 이루거나 모두 같을 때와 정확히 같다. 세 근이 모두 t라는 것은 $z^3+az^2+bz+c=(z-t)^3$이라는 뜻이므로 $a=-3t$, $b=3t^2$, $c=-t^3$이다. 즉 $b=\frac{a^2}{3}$이고 $c=\frac{a^3}{27}$이다. 따라서 근들이 (진짜) 정삼각형의 꼭짓점에 놓일 필요충분조건은

$$\boxed{a^2=3b\quad\text{이고}\quad 27c\neq a^3}$$

이다. 일치하는 세 점을 퇴화된(degenerate) 정삼각형으로 셈에 넣는다면, 조건은 단순히 $a^2=3b$이다.

이를 직접 확인하는 멋진 방법이 있다. $z=w-\frac{a}{3}$을 대입하면 z^2항이 사라진다. $a^2=3b$이면 일차항도 사라져서 방정식은 $w^3=\frac{a^3}{27}-c$가 된다. 이 방정식의 근은 0이 아닌 수의 세 세제곱근이고, 이들은 $w=0$, 즉 $z=-\frac{a}{3}$을 중심으로 하는 정삼각형을 이룬다. 이 점은 근들의 무게중심(centroid)이다.

검산

- $z^3 - 1 = 0 (a = b = 0,\ c = -1)$의 근은 $1, \omega, \omega^2$로 정삼각형을 이루며, 실제로 $a^2 = 0 = 3b$이고 $27c = -27 \neq 0$이다.
- $z^3 - z = 0$의 근은 $0, \pm 1$로 한 직선 위에 있다(collinear). 이때 $a^2 - 3b = 3 \neq 0$이다.
- 수치적으로, 임의로 만든 1000개의 삼각형 $\alpha, \beta, \gamma = \alpha + e^{i\pi/3}(\beta - \alpha)$에 대하여 삼각형이 반시계 방향의 정삼각형인지, $\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma$와 이차식이 (모든 순서에서) 0이 되는지 확인하였고, 임의의 복소수에 대하여 곱의 항등식과 $a^2 - 3b$ 공식이 10^{-8} 이내의 오차로 성립하는지 확인하였다.

흔한 실수

- 부호나 방향을 잘못 잡는 것: $e^{i\pi/3}$는 ω가 아니라 $-\omega^2$이다. 한 꼭짓점을 중심으로 ω만큼(즉 120°만큼) 회전하면 정삼각형이 나오지 않는다.
- 삼중근(triple root)의 경우를 잊는 것: $a^2 = 3b$만으로는 세 "꼭짓점"이 일치하는 $z^3 + az^2 + bz + c = (z + \frac{a}{3})^3$인 경우도 허용된다.

STEP 너머

조건 $\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0$은 세 수의 순서쌍 (α, β, γ)에 대한 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)의 한 성분이며, z^2항을 없애는 기법은 삼차방정식을 거듭제곱근(radical)으로 푸는 첫 단계로서 갈루아(Galois) 이론으로 이어진다. 기하적으로 보면, 이 결과는 근들이 정삼각형을 이루는 것이 도함수(derivative) $3z^2 + 2az + b$가 무게중심에서 중근(double root)을 가질 때와 정확히 같다는 것을 말해 준다. 이는 도함수의 근에 관한 마든 정리(Marden's theorem)의 특수한 경우이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈의 기하학을 더 탐구하기에 아주 훌륭한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.