풀이

STEP II 1987, 문제 3

순수수학 • 켤레 무리식

STEP II 1987, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s2-q3

핵심 아이디어

$\alpha = a + \sqrt{a^2 - b}$, $\beta = a - \sqrt{a^2 - b}$라 하자. 이 두 수는 서로 켤레(conjugate)이다. 두 수의 합 $2a$와 곱 b가 정수이므로 $\alpha^n + \beta^n$은 항상 정수이다. b에 대한 조건 때문에 작은 쪽 켤레 β가 0과 1 사이에 엄격하게 놓이게 된다면, β^n이 바로 우리가 찾는 소수 부분(fractional part)이 되고, 나머지는 모두 여기서 따라 나온다.

풀이

풀이 전체에서

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 - b}, \qquad \beta = a - \sqrt{a^2 - b}, \qquad \text{이므로} \qquad \alpha + \beta = 2a, \quad \alpha\beta = a^2 - (a^2 - b) = b.$$

β의 위치. 먼저 제곱근은 실수이다. $b < 2a - 1$이므로

$$a^2 - b > a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0.$$

이 엄격한 부등식의 양변에 양의 제곱근을 취하면 $\sqrt{a^2 - b} > a - 1$을 얻는다. 또한 $b > 0$이므로 $a^2 - b < a^2$이고 $\sqrt{a^2 - b} < a$이다. 이 둘을 합치면

$$a - 1 < \sqrt{a^2 - b} < a \quad \Longrightarrow \quad 0 < \beta < 1.$$

(이 조건은 최선이다. $b = 2a - 1$이면 $\sqrt{a^2 - b} = a - 1$이고 $\beta = 1$이 정확히 성립한다.)

소문항 (i)

$0 < \beta < 1$이므로 모든 양의 정수 n에 대하여 $0 < \beta^n < 1$이다. 이제 M은 정수이고 $0 \leq s < 1$인 s에 대하여 $\beta^n = M + s$이므로, M은 β^n의 정수 부분(integer part), 즉 0이다.

따라서

$$M = 0 \qquad \text{이고} \qquad s = \beta^n.$$

소문항 (ii)

$S_n = \alpha^n + \beta^n$이라 하자. S_n이 정수임을 보이겠다. $d = \sqrt{a^2 - b}$로 두고 두 거듭제곱을 이항정리(binomial theorem)로 전개하면

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(d^k + (-d)^k) = 2 \sum_{k \text{ 짝수}} \binom{n}{k} a^{n-k}(a^2 - b)^{k/2},$$

이다. k가 홀수인 항은 서로 소거되기 때문이다. 남은 항은 모두 정수이므로 $S_n \in \mathbb{Z}$이다. (같은 이야기를 달리 하면, α, β는 $t^2 - 2at + b = 0$의 근(root)이므로 $S_0 = 2$, $S_1 = 2a$이고 $S_n = 2aS_{n-1} - bS_{n-2}$이다.)

그러므로

$$\alpha^n = S_n - \beta^n, \qquad S_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \beta^n < 1.$$

? **생각해 보기** 왜 이로부터 $N = S_n$이고 $r = \beta^n$이어야 하는가?

N이 정수이고 $0 \le r < 1$일 때 $\alpha^n = N - r$로 나타내는 방법은 유일하다. N은 α^n 이상인 정수 중 가장 작은 것이어야 한다. $r, r' \in [0, 1)$에 대하여 $N' - r' = N - r$이면 $N - N' = r - r'$은 -1과 1 사이에 엄격하게 놓인 정수이므로 0이다. 우리가 얻은 식 $S_n - \beta^n$이 바로 이 꼴이므로

$$N = S_n = \alpha^n + \beta^n, \qquad r = \beta^n = s.$$

소문항 (iii)

$r = \beta^n$, $N = \alpha^n + \beta^n$, $(\alpha\beta)^n = b^n$을 이용하면

$$\begin{aligned} r^2 - Nr + b^n &= \beta^{2n} - (\alpha^n + \beta^n)\beta^n + \alpha^n\beta^n \\ &= \beta^{2n} - \alpha^n\beta^n - \beta^{2n} + \alpha^n\beta^n \\ &= 0, \end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 다시 말해 r은 두 근이 α^n과 β^n인 방정식 $t^2 - Nt + b^n = 0$의 작은 근이다.

마지막 소문항

$a = 8$, $a^2 - b = 63$으로 두면 $b = 1$이고 $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$이다. 조건 $b < 2a - 1 = 15$가 성립하므로 앞의 모든 결과를 $\alpha = 8 + 3\sqrt{7}$에 적용할 수 있다.

$$\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n = N - r, \qquad N \in \mathbb{Z},$$

이고, α^n은 정수 N보다 r만큼 작다. $b=1$일 때 소문항 (iii)에서 $r(N-r)=1$, 즉

$$r=\frac{1}{N-r}=\frac{1}{\left(8+3\sqrt{7}\right)^n}=\left(8-3\sqrt{7}\right)^n.$$

특히 $r\neq 0$이므로 이 거듭제곱 자체는 결코 정수가 아니며, $r\to 0$이다. 이제 $3\sqrt{7}=\sqrt{63}$은 $\sqrt{64}=8$보다 아주 조금 작으므로

$$8+3\sqrt{7}\approx 16=2^4,\qquad \text{따라서}\qquad r=\left(8+3\sqrt{7}\right)^{-n}\approx 16^{-n}=2^{-4n}.$$

그러므로 n이 클 때 $\left(8+3\sqrt{7}\right)^n$은 어떤 정수와의 차이가 약 2^{-4n} 이내이며, 그 정수보다 아주 조금 작다.

여기서 "약"은 얼마나 정확한가? $8+3\sqrt{7}\approx 15.937$이므로 $c=\log_2(8+3\sqrt{7})\approx 3.994$에 대하여 $r=2^{-cn}$이다. 지수는 $4n$과 0.2% 이내로 일치하며, 이 어림은 바로 이런 의미에서 성립한다. 비 $r/2^{-4n}=(16/(8+3\sqrt{7}))^n$은 $n=1$일 때 약 1.004에서 $n=10$일 때 1.04까지 천천히 증가한다.

검산

- $n=1$: $8+3\sqrt{7}\approx 15.93725$이고, 이는 $16-0.06275$이며, 예측대로 $8-3\sqrt{7}\approx 0.06275$이다. 또한 $r^2-16r+1=0$의 작은 근은 $8-\sqrt{63}$이다.
- $n=2$: $(8+3\sqrt{7})^2=127+48\sqrt{7}\approx 253.99606$이므로 $N=254=S_2=2\cdot 8\cdot 16-2$이고 $r\approx 0.003937$인데, 이는 $2^{-8}\approx 0.003906$과 비교된다.
- $b<2a-1$을 만족하는 무작위 순서쌍 (a,b) 수천 개와 $n\leq 7$에 대하여 컴퓨터로 확인한 결과 $0<\beta^n<1$, $N-\alpha^n=\beta^n$, $r^2-Nr+b^n=0$이 모두 성립하였다. $a=8$, $b=1$, $n\leq 10$에 대한 고정밀 계산으로 $N-\alpha^n=(8-3\sqrt{7})^n$도 확인하였다. $n=10$일 때 이 값은 9.46×10^{-13}으로, $2^{-40}\approx 9.09\times 10^{-13}$과 비교된다.

흔한 실수

- $\beta<1$만 보이고 $\beta>0$($b>0$이 필요하다)을 잊는 것. $M=0$이려면 둘 다 필요하다.
- $N-r$에서 정수 부분과 소수 부분이 왜 유일한지 설명하지 않고 $N=\alpha^n+\beta^n$이라고 단정하는 것.
- $r/2^{-4n}\to 1$이라고 기대하는 것. 그렇지 않다. $8+3\sqrt{7}$은 16에 가깝지만 같지는 않으므로, 이 근사는 지수에서의 근사이다.

STEP 너머

수 $\alpha^n + \beta^n$은 대각합(trace)의 한 예이다. α는 결레가 단위구간 안에 놓이는 대수적 정수(algebraic integer)이므로, 그 거듭제곱은 지수적으로 빠르게 정수에 가까워진다. 이런 수를 피조 수(Pisot number)라 한다. 황금비(golden ratio)도 그러한 수이며, 그래서 φ^n이 뤼카(Lucas) 수 L_n에 가깝다. 여기서 다룬 경우는 펠 방정식(Pell's equation)과도 연결된다. $8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1$이므로 $(8, 3)$은 $x^2 - 7y^2 = 1$의 가장 작은 양의 해이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 펠 방정식과 연분수(continued fraction)를 아름답게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.